



## MODIFIKASI MODEL SEIR PADA PENYAKIT CAMPAK

Sofia Faridatun Nisa<sup>1</sup>, Yuni Yulida<sup>1a</sup>, Faisal<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

<sup>a</sup>Kelompok Keahlian: Matematika Lingkungan dan Industri

Jln. Ahmad Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

Email: [sofia11sk@gmail.com](mailto:sofia11sk@gmail.com)

### ABSTRACT

The epidemic models Susceptible, Exposed, Infected and Recovered (SEIR) are used for the spread of diseases that have a latent period (incubation period) which one is measles disease. Latent periods are entered into the Exposed class. Measles itself after the incubation period will experience clinical symptoms consisting of three stages, which are prodromal stage, eruption stage and healing stage. Due to these clinical symptoms, the SEIR model can be modified by dividing the Infected class into two classes, which are Infected Prodromal class and Infected Eruption class. While the healing stage enters Recovered class. The spread of measles can be made into an epidemic model with five classes which are  $S, E, I_p, I_E$  and  $R$ . The purpose of this study is to explain the modification of the model, determine and analyze the model's local stability at the equilibrium point of the model and to interpret model simulations with multiple stability-eligible parameter values. The results obtained from this study are modification of SEIR model which is  $SEI_pI_ER$  model. Based on model, two equilibrium points obtained which are disease-free equilibrium points and endemic equilibrium points, which are locally asymptotically stable with conditions. Model simulations are presented to support an explanation of model stability analysis based on stability-meeting parameters.

**Keywords:** Measles, SEIR Model, Modification of SEIR Model, Equilibrium Point, Local Stability.

### ABSTRAK

Model epidemi *Susceptible, Exposed, Infected* dan *Recovered* (SEIR) digunakan untuk penyebaran penyakit yang memiliki periode laten (masa inkubasi), salah satunya adalah penyakit campak. Periode laten masuk ke dalam kelas *Exposed*. Penyakit campak sendiri setelah masa inkubasi akan mengalami gejala klinis yang terdiri dari tiga stadium yaitu stadium *prodromal*, stadium erupsi, dan stadium penyembuhan. Dikarenakan gejala klinis ini, model SEIR dapat dimodifikasi dengan membagi kelas *Infected* menjadi dua kelas yaitu *Infected Prodromal* dan kelas *Infected Eruption*. Sedangkan, stadium penyembuhan masuk kelas *Recovered*. Penyebaran penyakit campak dapat dibuat ke dalam model epidemi dengan lima kelas yaitu  $S, E, I_p, I_E$  dan  $R$ . Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan modifikasi model SEIR, menentukan dan menganalisis kestabilan lokal model di titik kesetimbangan pada model dan menginterpretasi simulasi model dengan beberapa nilai parameter memenuhi syarat kestabilan. Hasil yang diperoleh adalah modifikasi model SEIR pada penyakit campak yaitu model  $SEI_pI_ER$ . Berdasarkan model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik lokal bersyarat. Simulasi model disajikan untuk mendukung penjelasan mengenai analisis kestabilan model berdasarkan parameter-parameter yang memenuhi kestabilan.

**Kata Kunci:** Campak, Model *SEIR*, Modifikasi Model *SEIR*, Titik Keseimbangan, Kestabilan Lokal.

Received: 3 Januari 2022 Accepted: 31 Mei 2022 Published: 17 Juni 2022

## PENDAHULUAN

Penyakit campak merupakan penyakit menular yang berasal dari virus. Virus campak menyebar karena adanya kontak langsung serta melalui batuk dan bersin penderita. Virus ini cepat mati oleh bahan asam, bahan kimia, sinar ultraviolet dan pemanasan (Hasnawati et al., 2017).

Penyakit campak melalui beberapa fase dalam penularannya. Fase yang pertama, yaitu masa inkubasi. Masa inkubasi adalah masa dimana pertama kali seseorang terjangkit penyakit campak sampai munculnya gejala klinis penyakit, biasanya berlangsung selama 7-14 hari. Fase kedua adalah fase munculnya gejala klinis. Gejala klinis terdiri atas tiga stadium, yaitu stadium *prodromal* (*Catarrh* atau *Prodromal Stage*), stadium erupsi (*Eruption Stage*) dan stadium konvalensi atau stadium penyembuhan (*Recovery Stage*). Tiap stadium memiliki gejalanya masing-masing (Mariz, 2016). Masa penularan campak umum terjadi 4 hari sebelum dan sesudah munculnya gejala klinis, yaitu terjadi saat stadium *prodromal* dan stadium erupsi (Utara, 2017).

Individu dapat tertular campak ketika individu yang belum kebal terhadap campak berinteraksi erat dengan penderita. Seseorang dikatakan kebal jika telah melakukan imunasi atau pernah terinfeksi campak (Mutmainnah et al., 2019). Tidak ada pengobatan khusus untuk penyakit campak karena campak merupakan infeksi virus. Individu terinfeksi dapat berkurang dampaknya apabila memiliki kekebalan tubuh yang baik serta mendapat gizi yang cukup. Sedangkan, individu yang terinfeksi dengan gejala klinis mulai muncul harus menunggu hingga gejala mereda. Individu yang terserang campak disarankan untuk banyak beristirahat dan apabila muncul rasa tidak nyaman dapat diatasi dengan sesekali mandi air hangat. Diberikan suplemen nutrisi, asupan cairan yang cukup, serta antibiotik seperti vitamin A untuk mencegah terjadinya infeksi sekunder. Namun, jika terjadi komplikasi maka diperlakukan penanganan secara terpisah di rumah sakit (Ardilawati et al., 2015).

Model penyebaran penyakit campak telah banyak dibahas, salah satunya pada tahun 2013 oleh Momoh dkk (Momoh et al., 2013). Pada penelitian tersebut membahas tentang pengaruh individu *exposed* pada individu yang rentan dengan menggunakan analisis kestabilan dan solusi numeriknya. Selanjutnya, pada tahun 2017 Mitku & Koya (Mitku & Koya, 2017) memodifikasi model campak yang

dibuat oleh Momoh dkk. dengan membagi kelas *Infected* (I) menjadi kelas *prodromal (catarrh)* dan kelas erupsi (*Eruption*). Sehingga terbentuklah model  $SEI_p I_E R$ . Pada artikel ini, penulis mengkaji kembali penelitian dari (Mitku & Koya, 2017) dengan membahas Kembali model matematika penyebaran penyakit pada penyakit campak yang telah dimodifikasi, titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan analisa kestabilan di sekitar kesetimbangan serta dilakukan simulasi model sesuai dengan syarat & parameter yang memenuhi kestabilan.

## TINJAUAN PUSTAKA

### 1. Model Epidemik SEIR

Pada tahun 1927, Kermack dan McKendrick merumuskan model dasar tentang penyebaran penyakit. Pada awalnya, Kermack-McKendrick membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible* (S) merupakan kelas individu yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, *Infected* (I) adalah kelas individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang sehat, dan *Recovered* (R) yang merupakan kelas individu yang telah sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit.

Namun dikarenakan beberapa penyakit mempunyai periode laten contohnya penyakit campak. Periode laten artinya ada selang waktu suatu individu yang terinfeksi sampai munculnya gejala suatu penyakit. Maka dibuatlah kelas *Exposed* (E). Sehingga terbentuklah model SEIR.

Selanjutnya (Momoh et al., 2013) mengembangkan kembali model SEIR ini untuk penyakit campak. Pada penelitian tersebut membahas tentang pengaruh individu *exposed* pada individu yang rentan dengan menggunakan analisis kestabilan dan solusi numeriknya.

### 2. Titik Kesetimbangan dan Analisa Kestabilan

**Definisi 1** (Perko, 2013)

Titik  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  disebut titik kesetimbangan dari  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  jika  $f(\hat{x}) = \mathbf{0}$ .

### 3. Linearisasi

Kestabilan lokal sistem dapat dianalisa pada titik kesetimbangan menggunakan metode linearisasi. Sistem  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  jika dilinierisasi di sekitar titik ekuilibrium  $\hat{x}$  diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Selanjutnya berdasarkan (Anton & Rorres, 2013), Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (1) dapat dinyatakan sebagai

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (2)$$

#### 4. Metode CHIO

Metode CHIO digunakan untuk menentukan determinan matriks yang memiliki ordo  $n \times n$  dengan  $n \geq 3$  serta dengan syarat elemen pada baris pertama kolom pertama tidak sama dengan nol ( $a_{11} \neq 0$ ). Caranya adalah determinan yang akan dicari didekomposisi menjadi sub-sub determinan derajat dua ( $2 \times 2$ ), selanjutnya digunakan elemen matriks baris ke-1 dan kolom ke-1 sebagai titik tolaknya. Dekomposisi tersebut dilakukan dengan menggunakan matriks berukuran  $2 \times 2$  berikut (Saepudin, 2016). Dekomposisi determinan berhenti sampai determinan tersebut berderajat dua. Rumus metode CHIO sebagai berikut:

$$\det A = |A| = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

#### 5. Bilangan Reproduksi Dasar ( $\mathcal{R}_0$ )

Bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ) merupakan jumlah rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang masuk sepenuhnya ke dalam populasi *susceptible* (Van den Driessche & Watmough, 2002). Untuk menentukan nilai  $\mathcal{R}_0$ , pendekatan yang digunakan adalah menggunakan metode matriks *Next Generation (G)* (Jannah et al., 2021), (Astuti et al., 2021), (Yulida & Karim, 2020)

Misalkan diberikan  $n$  pada kelas populasi yang terinfeksi dan  $m$  pada kelas populasi yang tidak terinfeksi. Kemudian dimisalkan subpopulasi kelas yang terinfeksi disimbolkan sebagai  $\mathbf{x}$  dan subpopulasi kelas yang tidak terinfeksi disimbolkan sebagai  $\mathbf{y}$ , dengan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dan  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , untuk  $m, n \in \mathbb{N}$ , sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Perhitungan  $\mathcal{R}_0$  merupakan proses linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $(\mathbf{0}, \mathbf{y}_0)$ . Subpopulasi kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - V(x), \text{ dengan } F = \left[ \frac{\partial F(\mathbf{0}, \mathbf{y}_0)}{\partial x} \right] \text{ dan } V = \left[ \frac{\partial V(\mathbf{0}, \mathbf{y}_0)}{\partial x} \right]$$

Selanjutnya, didefinisikan matriks  $G$  sebagai berikut:

$$G = FV^{-1} \tag{4}$$

dengan  $G$  inilah disebut sebagai matriks *next generation*. Bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ) adalah nilai eigen dominan dari matriks.

**Definisi 2** (Anton & Rorres, 2013)

Diberikan matriks  $K$  sebagai berikut

$$K = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalkan  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , merupakan nilai eigen yang berbeda dari matriks  $K$ , dan jika  $|m_1|$  lebih besar dari  $|m_2|, \dots, |m_k|$ , maka  $m_1$  disebut nilai eigen dominan dari  $K$ . Setiap vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan disebut vektor eigen dominan.

### 6. Kriteria Routh-Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \tag{5}$$

dengan koefisien  $a_i$  adalah sebuah konstanta real dan  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Definisikan  $n$  matriks *Routh-Hurwitz* dengan menggunakan koefisien  $a_i$  dari persamaan karakteristik.

**Tabel 1.** Tabel Kriteria *Routh-Hurwitz*

$\lambda^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$\dots$
$\lambda^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$\lambda^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\lambda^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\dots$
$\lambda^{n-5}$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

dengan  $b_i, c_i, d_i, e_i, \dots$  didefinisikan sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \dots, b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}, \dots, c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}, \dots, d_n = \frac{c_1 b_{n+1} - b_1 c_{n+1}}{c_1}$$

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1}, \dots, e_n = \frac{d_1 c_{n+1} - c_1 d_{n+1}}{d_1}$$

⋮

Kriteria *Routh-Hurwitz* menyatakan bahwa, elemen-elemen pada kolom pertama Tabel 1 semuanya bernilai positif, maka nilai eigen dari Persamaan (4) bernilai negatif atau mempunyai bagian real yang bernilai negatif (Hasnawati et al., 2017).

**Teorema 3** (Bellomo & Preziosi, 1995)

Jika  $\lambda_i$  merupakan nilai eigen dari matriks Jacobian  $n \times n$  di titik kesetimbangan  $\hat{x}$  dan  $Re(\lambda_i)$  merupakan bagian real dari  $\lambda_i$ , maka:

- Untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $Re(\lambda_i) < 0$  maka  $\hat{x}$  stabil asimtotik.
- Jika terdapat  $Re(\lambda_i) > 0$  untuk suatu  $i$  maka  $\hat{x}$  tidak stabil.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan membentuk model berdasarkan asumsi-asumsi yang telah disusun, menentukan titik kesetimbangan dengan menggunakan Definisi 1 dan nilai  $\mathcal{R}_0$  dengan menggunakan matriks *next generation*, menganalisis kestabilan lokal sistem di titik kesetimbangan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dan Teorema 3. Selanjutnya membuat dan menginterpretasi simulasi model.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Pembentukan Model

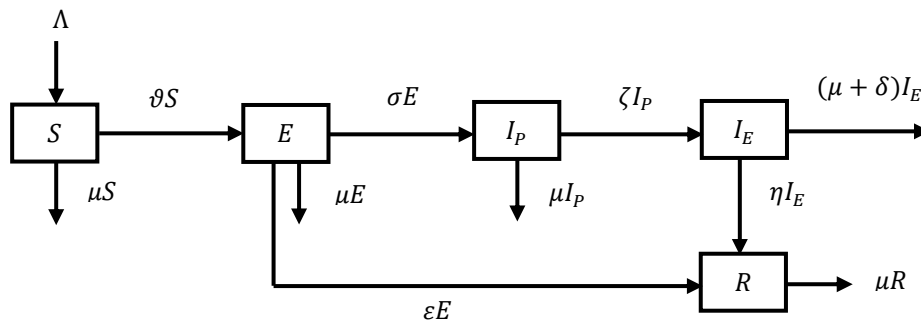
Penyakit campak merupakan salah satu penyakit menular bersifat endemik yang dapat dimodelkan menggunakan model matematika. Penyakit campak memiliki masa laten (masa inkubasi) dan memiliki tiga stadium yaitu stadium *prodromal*, stadium *eruption* dan stadium penyembuhan. Berdasarkan hal tersebut, model matematika penyebaran penyakit campak diasumsikan terdiri dari 5 subpopulasi, yaitu populasi individu sehat tetapi rentan penyakit  $S(t)$ , populasi

individu yang berada dalam periode laten  $E(t)$ , populasi individu yang berada dalam stadium *prodromal*  $I_P(t)$ , populasi individu yang berada dalam stadium *eruption*  $I_E(t)$  dan populasi individu yang berada dalam stadium penyembuhan dan kemungkinan besar kebal terhadap penyakit  $R(t)$ .

Asumsi-asumsi yang digunakan yaitu:

- (1) Populasi yang diamati hanya untuk satu penyakit, yaitu penyakit campak.
- (2) Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan dan masuk ke dalam kelas *Susceptible*.
- (3) Individu rentan di kelas *Susceptible* akan berpindah ke kelas *Exposed* dengan laju sebesar  $\vartheta = \frac{\beta c(I_P + I_E)}{N}$  dikarenakan adanya kontak dengan individu pada kelas terinfeksi (baik *Infected Prodromal* maupun *Infected Eruption*).
- (4) Adanya terapi berupa pemberian gizi yang baik dapat membuat individu pada kelas *Exposed* memiliki kekebalan tubuh yang baik sehingga dapat sembuh dan memasuki kelas *Recovered*.
- (5) Jika individu *Exposed* dengan kekebalan tubuh lemah serta tidak mendapat terapi yang baik, maka individu tersebut dapat memasuki kelas *Infected Prodromal*.
- (6) Setelah individu memasuki kelas *Infected Prodromal* penyakit akan bertambah parah sehingga memasuki kelas *Infected Eruption*.
- (7) Individu dari kelas *Infected Eruption* dapat sembuh dan bergabung dengan kelas *Recovered* dengan adanya *treatment* (pengobatan).
- (8) Apabila pengobatan kurang efektif, individu pada kelas *Infected Eruption* dapat meninggal akibat penyakit campak.
- (9) Individu tiap kelas diasumsikan mengalami laju kematian alami yang sama.
- (10) Individu yang berasal dari kelas *Exposed* dan *Infected Eruption* pada kelas *Recovered* diasumsikan menjadi kebal permanen terhadap penyakit campak.

Dari asumsi-asumsi tersebut, dibentuk suatu kompartemen sebagai berikut:



**Gambar 1.** Diagram Modifikasi Model SEIR Pada Penyakit Campak

Gambar 1 dapat dibentuk ke dalam sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut: (Mitku & Koya, 2017)

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \left( \frac{\beta c(I_P + I_E)}{N} + \mu \right) S \\
 \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta c(I_P + I_E)}{N} S - (\sigma + \varepsilon + \mu) E \\
 \frac{dI_P}{dt} &= \sigma E - (\zeta + \mu) I_P \\
 \frac{dI_E}{dt} &= \zeta I_P - (\eta + \delta + \mu) I_E \\
 \frac{dR}{dt} &= \eta I_E + \varepsilon E - \mu R
 \end{aligned} \tag{6}$$

dengan

- $\Lambda$  : Banyaknya individu baru akibat adanya kelahiran
- $\vartheta$  : Laju penularan efektif penyakit campak
- $\beta$  : Laju kontak individu *Susceptible* menjadi individu *Exposed*.
- $c$  : Laju kontak per kapita
- $\frac{I_P + I_E}{N}$  : Perbandingan jumlah individu terinfeksi dengan total populasi
- $N$  : Total Populasi
- $\sigma$  : Laju transfer dari *Exposed* ke *Infected Prodromal*
- $\zeta$  : Laju transfer dari *Infected Prodromal* ke *Infected Eruption*.
- $\delta$  : Laju kematian akibat penyakit campak
- $\eta$  : Laju kesembuhan individu yang diberi pengobatan
- $\varepsilon$  : Laju terapi campak
- $\mu$  : Laju kematian alami

## 2. Kesetimbangan Model dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan modifikasi model SEIR pada penyakit campak dapat ditentukan berdasarkan Definisi 1 dengan memenuhi persamaan  $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI_P}{dt} = \frac{dI_E}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ . Titik kesetimbangan pada model ini ada dua, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0^*$ ) dan titik kesetimbangan endemik penyakit ( $E_1^*$ ). Bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan matriks *next generation*.

### 2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit ( $E_0^*$ )

Titik kesetimbangan  $E_0^*$  berarti tidak ada individu yang terjangkit dan dapat menyebarkan penyakit pada populasi. Berdasarkan Definisi 1, diperoleh  $E_0^*$  sebagai berikut:



$$E_0^* = (S_0, E_0, I_{P_0}, I_{E_0}, R_0) = \left( \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (7)$$

## 2.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Pada Persamaan (6), subpopulasi yang terinfeksi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI_P}{dt} \\ \frac{dI_E}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta c(I_P + I_E)}{N} S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\sigma + \varepsilon + \mu)E \\ (\zeta + \mu)I_P - \sigma E \\ (\eta + \delta + \mu)I_E - \zeta I_P \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(x, y) - \mathcal{V}(x, y) \end{aligned} \quad (8)$$

Selanjutnya, Persamaan (8) dilinearisasi diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & \beta c & \beta c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma + \varepsilon + \mu & 0 & 0 \\ -\sigma & \mu + \zeta & 0 \\ 0 & -\zeta & \mu + \delta + \eta \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F} - \mathbf{V} \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3) diperoleh matriks  $\mathbf{G}$  sebagai berikut:

$$\mathbf{G} = \mathbf{FV}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \beta c}{pqr} (r + \zeta) & \frac{\beta c}{q} \left( \frac{r + \zeta}{r} \right) & \frac{\beta c}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan  $p = \sigma + \varepsilon + \mu$ ;  $q = \mu + \zeta$ ;  $r = \mu + \delta + \eta$  (9)

Berdasarkan (Anton & Rorres, 2013), diperoleh nilai eigen dari  $\mathbf{G}$  yaitu  $\lambda_{1,2} = 0$  dan  $\lambda_3 = \frac{\sigma \beta c}{pqr} (r + \zeta)$ . Selanjutnya berdasarkan Definisi 2, nilai  $\mathcal{R}_0$  yang diperoleh yaitu:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma \beta c}{pqr} (r + \zeta) = \frac{\beta c \sigma [(\mu + \delta + \eta) + \zeta]}{(\sigma + \varepsilon + \mu)(\mu + \zeta)(\mu + \delta + \eta)} \quad (10)$$

## 2.3 Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit ( $E_1^*$ )

Titik kesetimbangan  $E_1^*$  berarti ada individu yang terjangkit dan dapat menyebarkan penyakit pada populasi. Berdasarkan Definisi 1, diperoleh  $E_1^*$  sebagai berikut:

$$E_1^* = (S^*, E^*, I_P^*, I_E^*, R^*) \quad (11)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{\mu} \left( \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right); \frac{\Lambda}{(\sigma + \varepsilon + \mu)} \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right); \frac{\sigma \Lambda \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)}{(\sigma + \varepsilon + \mu)(\zeta + \mu)}; \\ \frac{\Lambda \sigma \zeta \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right)}{(\sigma + \varepsilon + \mu)(\zeta + \mu)(\eta + \delta + \mu)}; \\ \Lambda \left[ \frac{\eta \sigma \zeta + \varepsilon(\zeta + \mu)(\eta + \delta + \mu)}{\mu(\sigma + \varepsilon + \mu)(\zeta + \mu)(\eta + \delta + \mu)} \right] \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} \right) \end{pmatrix}$$

### 3. Kestabilan Lokal Model

Sistem persamaan (6) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear, maka analisa kestabilan dapat ditentukan dengan melinearisasi sistem menggunakan matriks Jacobian. Bentuk matriks Jacobian dari Persamaan (6) diperoleh sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\left( \frac{\beta c(I_P + I_E)}{N} + \mu \right) & 0 & -\frac{\beta c S}{N} & -\frac{\beta c S}{N} & 0 \\ \frac{\beta c(I_P + I_E)}{N} & -(\sigma + \varepsilon + \mu) & \frac{\beta c S}{N} & \frac{\beta c S}{N} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\zeta + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & -(\eta + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \eta & -\mu \end{bmatrix} \quad (12)$$

#### 3.1 Kestabilan Lokal di Titik $E_0^*$

Matriks Jacobian (12) di sekitar titik  $E_0^*$  adalah

$$J_{E_0^*} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta c & -\beta c & 0 \\ 0 & -(\sigma + \varepsilon + \mu) & \beta c & \beta c & 0 \\ 0 & \sigma & -(\zeta + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & -(\eta + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \eta & -\mu \end{bmatrix} \quad (13)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (2) dan Persamaan (3) maka persamaan karakteristik dari Persamaan (13) adalah sebagai berikut:

$$-(\mu + \lambda)^2 (a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3) = 0 \quad (14)$$

dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (p + q + r)$$

$$a_2 = pq + pr + qr - \sigma \beta c$$

$$a_3 = pq\zeta - \sigma \beta c(r + \zeta) = pqr(1 - \mathcal{R}_0)$$

Persamaan (14) memberikan dua nilai eigen negatif, yaitu  $\lambda_{1,2} = -\mu < 0$ , sedangkan tiga nilai eigen lainnya ditentukan melalui  $(a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3)$

$a_3) = 0$ . Sehingga akan digunakan Kriteria *Routh-Hurwitz*.  $E_0^*$  dikatakan stabil jika memenuhi jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ dan } a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (15)$$

(1)  $a_0 = 1 > 0$

(2)  $a_1 = p + q + r > 0$ , karena semua parameter bernilai positif

(3)  $a_3 = pqr(1 - \mathcal{R}_0) > 0$  jika  $\mathcal{R}_0 < 1$

(4)  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  jika  $(\mu + \delta + \eta) > \beta c$

Berdasarkan kriteria *Routh Hurwitz* dapat dinyatakan bahwa akar-akar Persamaan (14) memiliki bagian riil negatif dan berdasarkan Teorema 3,  $E_0^*$  stabil asimtotik jika  $(\mu + \delta + \eta) > \beta c$  dan  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

### 3.2 Kestabilan Lokal di Titik $E_1^*$

Matriks Jacobian (12) di sekitar titik  $E_1^*$  adalah

$$J_{E_1^*} = \begin{bmatrix} -\left[\beta c \frac{I_P^* + I_E^*}{N} + \mu\right] & 0 & -\frac{\beta c \frac{\Lambda}{\mu} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{N} & -\frac{\beta c S^*}{N} & 0 \\ \beta c \frac{I_P^* + I_E^*}{N} & -(\sigma + \varepsilon + \mu) & \frac{\beta c \frac{\Lambda}{\mu} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{N} & \frac{\beta c S^*}{N} & 0 \\ 0 & \sigma & -(\zeta + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & -(\eta + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \eta & -\mu \end{bmatrix} \quad (16)$$

Menggunakan Persamaan (2) dan Persamaan (3), persamaan karakteristik dari Persamaan (16) adalah sebagai berikut:

$$-(\mu + \lambda)(\mathcal{b}_0 \lambda^4 + \mathcal{b}_1 \lambda^3 + \mathcal{b}_2 \lambda^2 + \mathcal{b}_3 \lambda + \mathcal{b}_4) = 0 \quad (17)$$

dengan

$$\mathcal{b}_0 = 1$$

$$\mathcal{b}_1 = \mathcal{R}_0 \mu + p + q + r$$

$$\mathcal{b}_2 = \mathcal{R}_0 \mu (p + q + r) + pq + pr + qr - \sigma \beta c / \mathcal{R}_0$$

$$\mathcal{b}_3 = \mathcal{R}_0 \mu (pq + pr + qr) + pqr - (q + r) \sigma \beta c / \mathcal{R}_0$$

$$\mathcal{b}_4 = pqr \mu (\mathcal{R}_0 - 1)$$

Persamaan (17) memberikan satu nilai eigen negatif, yaitu  $\lambda_1 = -\mu$ , sedangkan empat nilai eigen lainnya ditentukan melalui  $(\mathcal{b}_0 \lambda^4 + \mathcal{b}_1 \lambda^3 + \mathcal{b}_2 \lambda^2 + \mathcal{b}_3 \lambda + \mathcal{b}_4) = 0$ . Selanjutnya, digunakan Kriteria *Routh-Hurwitz*, titik  $E_1^*$  stabil jika memenuhi syaart sebagai berikut:

$$\mathcal{b}_0 > 0, \mathcal{b}_1 > 0, \mathcal{b}_4 > 0, \mathcal{b}_1 \mathcal{b}_2 - \mathcal{b}_0 \mathcal{b}_3 > 0$$

$$\text{dan } \mathcal{b}_3 (\mathcal{b}_1 \mathcal{b}_2 - \mathcal{b}_0 \mathcal{b}_3) - \mathcal{b}_1^2 \mathcal{b}_4 > 0 \quad (18)$$

(1)  $\mathcal{b}_0 = 1 > 0$

- (2)  $\mathcal{b}_1 = \mathcal{R}_0\mu + p + q + r > 0$ , karena semua parameter bernilai positif.
- (3)  $\mathcal{b}_4 = pqr\mu(\mathcal{R}_0 - 1) > 0$  jika  $\mathcal{R}_0 > 1$
- (4)  $\mathcal{b}_1\mathcal{b}_2 - \mathcal{b}_0\mathcal{b}_3 > 0$  jika  $\frac{(\mathcal{R}_0-1)\mu+\sigma+\varepsilon}{(\delta+\eta+\zeta)} < 2$  dan  $\mathcal{R}_0 > 1$
- (5)  $\mathcal{b}_3(\mathcal{b}_1\mathcal{b}_2 - \mathcal{b}_0\mathcal{b}_3) - \mathcal{b}_1^2\mathcal{b}_4 > 0$  jika  $\mu(\mathcal{R}_0 - 1) > \zeta$ ,  $\mathcal{R}_0(\mathcal{R}_0 - 1) < 3$ ,  $\mathcal{R}_0 > 1$ , dan  $\frac{(\mathcal{R}_0-1)\mu+\sigma+\varepsilon}{(\delta+\eta+\zeta)} < 2$ .

Berdasarkan kriteria *Routh Hurwitz* dapat dinyatakan bahwa akar-akar Persamaan (17) memiliki bagian real negatif dan berdasarkan Teorema 3,  $E_1^*$  stabil asimtotik jika  $\mu(\mathcal{R}_0 - 1) > \zeta$ ,  $\mathcal{R}_0(\mathcal{R}_0 - 1) < 3$ ,  $\mathcal{R}_0 > 1$ , dan  $\frac{(\mathcal{R}_0-1)\mu+\sigma+\varepsilon}{(\delta+\eta+\zeta)} < 2$ .

#### 4. Simulasi Model

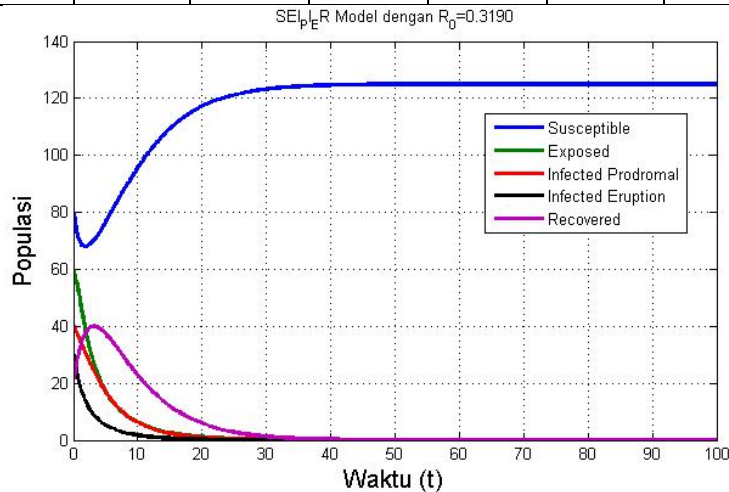
Nilai awal yang digunakan untuk simulasi model yaitu  $S(0) = 80, E(0) = 60, I_p(0) = 40, I_e(0) = 30$  dan  $R(0) = 20$

##### 4.1 Simulasi Model untuk Titik $E_0^*$

Gunakan nilai awal yang telah dimisalkan dan parameter yang memenuhi syarat  $(\mu + \delta + \eta) > \beta c$  dan  $\mathcal{R}_0 < 1$  dalam Tabel 2 yaitu:

**Tabel 2. Parameter untuk Simulasi Titik  $E_0^*$**

$\Lambda$	$\beta$	$c$	$\sigma$	$\zeta$	$\eta$	$\mu$	$\delta$	$\varepsilon$
25	0.2	2	0.125	0.125	0.15	0.2	0.3	0.25



**Gambar 2. Simulasi di Titik  $E_0^*$**

Berdasarkan Gambar 2, dapat dijelaskan bahwa perubahan populasi susceptible dari waktu ke waktu meningkat karena tidak adanya penyebaran penyakit atau kontak dengan populasi infected prodromal maupun dengan populasi infected eruption yang dapat menyebabkan populasi susceptible berkurang dan masuk ke populasi exposed dan stabil pada nilai 125. Perubahan populasi exposed, infected prodromal, infected eruption dan recovered dari waktu ke waktu

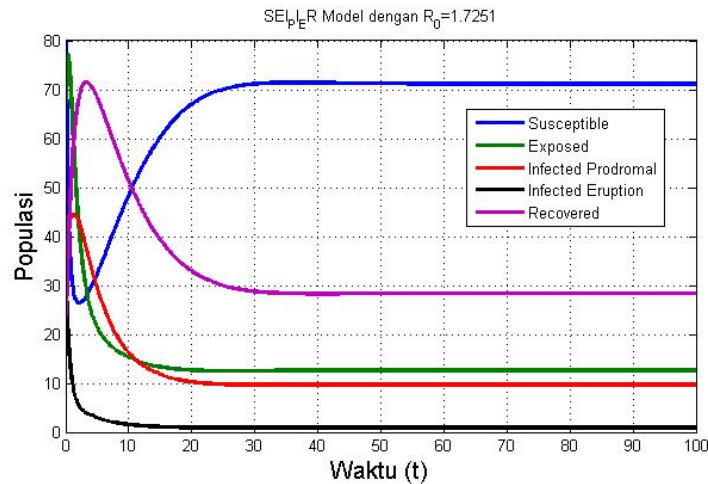
mengalami penurunan dan menuju nilai nol. Hal ini diakibat tidak adanya penyebaran penyakit campak di populasi. Nilai kelima populasi tersebut stabil asimtotik lokal di persekitaran titik kesetimbangan- $E_0^*$  (125, 0, 0, 0, 0).

#### 4.2 Simulasi Model untuk Titik $E_1^*$

Gunakan nilai awal yang telah dimisalkan dan parameter yang memenuhi syarat  $\mu(\mathcal{R}_0 - 1) > \zeta$ ,  $\mathcal{R}_0(\mathcal{R}_0 - 1) < 3$ ,  $\mathcal{R}_0 > 1$ , dan  $\frac{(\mathcal{R}_0-1)\mu+\sigma+\varepsilon}{(\delta+\eta+\zeta)} < 2$  dalam Tabel 3 yaitu:

**Tabel 3.** Parameter untuk Simulasi Titik  $E_1^*$

$\Lambda$	$\beta$	$c$	$\sigma$	$\zeta$	$\eta$	$\mu$	$\delta$	$\varepsilon$
25	0.7	2.5	0.25	0.125	0.7	0.2	0.5	0.4



**Gambar 3.** Simulasi di Titik  $E_1^*$

Berdasarkan Gambar 3, dapat dijelaskan bahwa perubahan populasi *susceptible* awalnya menurun amun dari waktu ke waktu meningkat dan stabil pada nilai 71. Populasi *exposed* mengalami peningkatan selanjutnya menurun dan stabil pada nilai 13. Populasi *infected prodromal* mengalami peningkatan selanjutnya menurun dan stabil pada nilai 10. Populasi *infected eruption* dari waktu ke waktu mengalami penurunan dan stabil pada nilai 1. Populasi *exposed* mengalami peningkatan selanjutnya menurun dan stabil pada nilai 28. Hal ini diakibatkan adanya penyebaran penyakit campak serta efektifnya *treatment* dan pengobatan pada populasi. Nilai kelima populasi tersebut stabil asimtotik lokal dipersekitaran titik kesetimbangan  $E_1^*$  (71, 13, 10, 1, 28).

### KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari analisa kestabilan pada Modifikasi Model SEIR dapat disimpulkan melalui table berikut

Titik Keseimbangan	Syarat Kestabilan	Jenis Kestabilan
$E_0^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$	$(\mu + \delta + \eta) > \beta c \text{ dan } \mathcal{R}_0 < 1,$ $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta c \sigma [(\mu + \delta + \eta) + \zeta]}{(\sigma + \varepsilon + \mu)(\mu + \zeta)(\mu + \delta + \eta)}$	Stabil Asimtotik Lokal
$E_1^* = (S^*, E^*, I_P^*, I_E^*, R^*), \text{ dengan}$ $S^* = \frac{\Lambda}{\mu} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$ $E^* = \frac{\Lambda}{(\sigma + \varepsilon + \mu)} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$ $I_P^* = \frac{\sigma \Lambda \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{(\sigma + \varepsilon + \mu)(\zeta + \mu)}$ $I_E^* = \frac{\Lambda \sigma \zeta \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{(\sigma + \varepsilon + \mu)(\zeta + \mu)(\eta + \delta + \mu)}$ $R^* = \Lambda \left[ \frac{\eta \sigma \zeta + \varepsilon(\zeta + \mu)(\eta + \delta + \mu)}{\mu(\sigma + \varepsilon + \mu)(\zeta + \mu)(\eta + \delta + \mu)} \right] \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$	$\mu(\mathcal{R}_0 - 1) > \zeta,$ $\mathcal{R}_0(\mathcal{R}_0 - 1) < 3,$ $\mathcal{R}_0 > 1, \text{ dan } \frac{(\mathcal{R}_0 - 1)\mu + \sigma + \varepsilon}{(\delta + \eta + \zeta)} < 2$	Stabil Asimtotik Lokal

### REFERENSI

- Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra: Applications Version* (11th ed.). John Wiley & Sons Inc.
- Ardilawati, N. M., Ratianingsih, R., & Jaya, A. I. (2015). Menentukan Tingkat Imunisasi Dan Pengobatan Optimal Dari Model Epidemik Penyakit Campak Dengan Metode Minimum Pontryagin. *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, 12(1), 64–73.
- Astuti, V., Yulida, Y., & Thresye. (2021). Model Matematika Penyebaran Penyakit Diare dengan adanya Treatment. *Jurnal Epsilon*, 15(1), 46–57.
- Bellomo, N., & Preziosi, L. (1995). *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC press.
- Hasnawati, H., Ratianingsih, R., & Puspita, J. W. (2017). Analisis Kestabilan Model Matematika Pada Penyebaran Kanker Serviks Menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, 14(1), 120–127. <https://doi.org/10.22487/2540766x.2017.v14.i1.8360>
- Jannah, M., Ahsar Karim, M., & Yulida, Y. (2021). Analisis Kestabilan Model

- SEIR Untuk Penyebaran Covid-19 Dengan Parameter Vaksinasi. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 15(3), 535–542. <https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss3pp535-542>
- Mariz, D. R. (2016). Diagnosis dan Tatalaksana Morbili. *Jurnal Medula*, 4(3), 40–45.
- Mitku, S. N., & Koya, P. R. (2017). Mathematical Modeling and Simulation Study for the Control and Transmission Dynamics of Measles. *American Journal of Applied Mathematics*, 5(4), 99–107.
- Momoh, A. A., Ibrahim, M. O., Uwanta, I. J., & Manga, S. B. (2013). Mathematical Model for Control of Measles Epidemiology. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 87(5), 707–718.
- Mutmainnah, Awalushaumi, L., & Aini, Q. (2019). Model Dinamika Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Vaksinasi dan Penerapannya di Provinsi Nusa Tenggara Barat. *E-Jurnal Matematika*, 8(2), 112–121.
- Perko, L. (2013). *Differential Equations and Dynamical Systems* (Third Edit). Springer-Verlag.
- Saepudin, A. (2016). Menentukan Determinan Suatu Matriks Dengan Metode Chio. *Jurnal Buana Matematika*, 6(1), 25–29.
- Utara, D. K. S. (2017). *Mengenal Penyakit Campak*. Dinas Kesehatan Provinsi Sumatera Utara.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48.
- Yulida, Y., & Karim, M. A. (2020). Pemodelan Matematika Penyebaran COVID-19 di Provinsi Kalimantan Selatan. *Jurnal Binawakya*, 14(10), 3257–3264. <http://ejurnal.binawakya.or.id/index.php/MBI/article/view/572>