

**PENGGUNAAN METODE *BRANCH AND BOUND* UNTUK
MENYELESAIKAN MASALAH PENUGASAN PADA KASUS
PENYUSUNAN JARINGAN KOMUNIKASI**

Fitriadi, Dewi Sri Susanti, dan Nur Salam
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km 36,800 Kampus Unlam Banjarbaru

ABSTRAK

Masalah penugasan adalah bagaimana memasangkan tepat satu petugas dengan satu tugas yang ada, tujuannya adalah untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum atau biaya yang minimum. Salah satu kasus masalah penugasan adalah penyusunan jaringan komunikasi, yaitu bagaimana membuat susunan urutan pengiriman pesan singkat (SMS) dari satu orang ke orang lain dalam suatu kelompok. Setiap orang di dalam kelompok mempunyai kewajiban untuk mengirimkan satu sms ke orang yang lain. Tahap akhir proses ini adalah sms yang dikirim oleh orang pertama akan kembali kepada si pengirim pertama sebagai tanda bahwa semua anggota kelompok telah menerima sms. Penyusunan jaringan komunikasi dilakukan dengan metode Branch and Bound yaitu dengan membagi masalah yang berukuran besar menjadi berukuran kecil sehingga dapat diselesaikan, pembagian dilakukan secara rekursif sehingga menghasilkan struktur pohon. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan penyelesaian optimal masalah penugasan pada kasus penyusunan jaringan komunikasi dengan metode Branch and Bound.

Penelitian ini dilakukan melalui studi literature, yaitu dengan cara mengumpulkan dan mempelajari referensi-referensi pendukung yang berkaitan dengan masalah penugasan dan Branch and Bound. Prosedur penelitian ini yaitu membuat matriks biaya, mengurangi baris dan mengurangi kolom, menjumlahkan pengurang baris dan kolom sehingga didapatkan nilai batas simpul 0, simpul 0 dicabangkan menghasilkan aras pertama, nilai batas simpul dicari dengan menggunakan rumus $C_s = C_r + C_{i,j} + r$. Nilai optimum dari aras pertama dijadikan simpul-E yang akan dicabangkan dan menghasilkan aras kedua dan seterusnya.

Dari Hasil penelitian didapatkan salah satu susunan jaringan komunikasi yaitu Simpati → As → Halo → Matrix → Mentari → Starone → im3 → Flexi → Fren → xl → Simpati dengan biaya minimum Rp. 1.298.

Kata Kunci: Masalah Penugasan, Branch and Bound, Jaringan Komunikasi.

ABSTRACT

Assignment problem is how to match exactly only one agent for one task, the aim is to get maximum advantage or minimum cost. One of assignment problem case is arranging communication network, that how to make order formation of sending Short Message Service (SMS) from someone to another one in a group. Each one in that group has to send one SMS to the other member. The last stage in this process is the SMS was sent by the first sender will comeback to the first sender again as indication that all of member of a group was received SMS.

Arranging communication network is done by using branch and bound method by distributing the big scale problem to the small until it can be solved. Distributing is done recursive until formed tree structure. The objective of this research is how to find optimal solution for solving assignment problem in arranging communication network by using branch and bound method.

This research is done with literature study method that is by collecting and studying from supporter reference related to assignment problem and branch and bound method. Procedure in this research that is forming cost matrix, reducing rows and columns, counting up all rows and columns reducer as bound of 0 node. 0 node have branch that called first level, node's bound of first level finding by using formula $C_s = C_r + C_{i,j} + r$. optimum bound of first level make as E-node that will branched and resulting second level, etc.

The result of research is finding one of communication network that below: Simpati → As → Halo → Matrix → Mentari → starOne → Im3 → Flexi → Fren → XL → Simpati with minimum cost Rp 1.298.

Keywords: *Assignment Problem, Branch and Bound, Communication Network.*

1. PENDAHULUAN

Sumber daya (bahan baku, waktu, tenaga kerja, uang) pada umumnya mengalami keterbatasan sehingga diperlukan pengambilan keputusan terbaik agar setiap sumber daya yang dimiliki dapat terproses dengan baik dan mendapatkan hasil yang maksimal. Pengambilan keputusan yang terbaik merupakan inti dari model-model optimasi. Salah satu model optimasi adalah masalah penugasan yaitu bagaimana mendelegasikan sejumlah tugas (*assignment*) kepada sejumlah petugas (*assignee*), sehingga setiap petugas (*assignee*) hanya mendapatkan tepat satu tugas (*assignment*) dan setiap tugas hanya dikerjakan oleh seorang petugas. Pada akhirnya untuk setiap tugas yang diselesaikan petugas, maka besarnya kerugian yang ditimbulkan minimal atau keuntungan yang didapatkan maksimal (Hiller dan Lieberman, 1990:242).

Jaringan komunikasi adalah bagaimana mengirim pesan singkat (*Short Message Service (SMS)*) dari pengirim pertama kepada pengirim kedua, diteruskan ke pengirim ketiga dan seterusnya sehingga pada akhirnya kembali lagi ke pengirim pertama. Jadi, setiap orang mempunyai satu tugas yaitu mengirim satu SMS kepada orang lain. Penyusunan jaringan komunikasi mempunyai kesamaan dengan masalah penugasan yaitu pengirim SMS sebagai sumber dan penerima SMS sebagai tujuan. Akan tetapi, jaringan komunikasi sering dihadapkan pada permasalahan berupa perbedaan tarif SMS masing-masing operator. SMS dari ponsel yang menggunakan operator A mempunyai tarif yang lebih murah atau bahkan gratis untuk sesama operator A, tetapi relatif mahal untuk operator yang berbeda. Sehingga diperlukan metode untuk meminimalkan biaya pengiriman SMS untuk kelompok tersebut.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan adalah metode *Branch and Bound*. Konsep utama dari metode *Branch and Bound* adalah dengan membagi masalah aslinya yang berukuran besar menjadi sub masalah yang lebih kecil kemudian menjadi anak gugus yang lebih kecil lagi sampai semua submasalah dapat diselesaikan (Hiller dan Liebermann, 1990: 468).

Dalam penelitian ini akan dilakukan pengkajian bagaimana menentukan solusi optimal jaringan komunikasi dengan metode *Branch and Bound* dan diharapkan melalui penelitian ini dapat memberikan alternatif penyelesaian masalah yang efisien dan optimal pada masalah penugasan dan implementasinya dalam persoalan yang serupa.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui studi literatur, yaitu dengan cara mengumpulkan dan mempelajari referensi-referensi pendukung mengenai masalah penugasan dan metode *Branch and Bound*.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Membuat matriks biaya pengiriman SMS.
2. Mereduksi atau mengurangi setiap baris matriks biaya agar setiap baris memiliki entri nol.
3. Mereduksi atau mengurangi setiap kolom matriks biaya yang belum memiliki entri nol agar memiliki entri nol.
4. Menjumlahkan semua pengurang pada saat pengurangan baris dan kolom sehingga didapat C_0 sebagai nilai batas simpul 0, kemudian menjadikan simpul 0 sebagai simpul-E.
5. Menghitung nilai batas simpul pada aras pertama yaitu dengan menjadikan C_0 pada simpul 0 sebagai C_r pada aras pertama, menentukan nilai C_{ij} yaitu biaya pemasangan sumber i dengan tujuan j dan menentukan nilai r dengan menjumlahkan semua pengurang baris dan kolom ketika membuat matriks untuk simpul s . Nilai batas simpul ditentukan dengan rumus:

$$C_s = C_r + C_{ij} + r$$

6. Menghitung nilai batas simpul pada aras kedua dengan menjadikan batas simpul minimum pada aras pertama sebagai C_r , langkah berikutnya sama dengan pencarian aras pertama dan selanjutnya sampai pada aras terakhir.
7. Membuat pohon pencarian dari semua simpul setiap aras yang telah ditemukan.
8. Menyusun jaringan komunikasi berdasarkan pohon pencarian yang telah didapat.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Jaringan komunikasi adalah salah satu model dari masalah penugasan, yaitu pengirim SMS sebagai sumber dan penerima SMS sebagai tujuan dan biaya pengiriman SMS sebagai bobot. Jadi permasalahannya adalah bagaimana agar semua anggota dari jaringan komunikasi mengirim satu SMS dan menerima satu SMS berdasarkan urutan yang menghasilkan total biaya pengiriman SMS minimum.

Contoh Kasus Masalah Penyusunan Jaringan Komunikasi.

Tabel 4.1. Daftar Tarif SMS Beberapa Varian Produk Operator (Rp/SMS)

	Simpati	As	Halo	Matrix	Mentari	Starone	Im3	Flexi	Fren	XI
Simpati	100	100	100	150	150	150	150	150	150	150
As	88	88	88	149	149	149	149	149	149	149
Halo	125	125	125	150	150	150	150	150	150	150
Matrix	150	150	150	100	100	100	100	150	150	150
Mentari	149	149	149	99	99	99	99	149	149	149
Starone	150	150	150	100	100	25	100	150	150	150
Im3	125	125	125	125	125	125	125	125	125	125
Flexi	136	136	136	136	136	136	136	75	136	136
Fren	150	150	150	150	150	150	150	150	50	150
XI	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250

(Dari berbagai sumber terlampir pada lampiran 1)

Pada daftar tarif di atas baris menyatakan sumber, sehingga Simpati pada baris pertama menyatakan sumber 1, As pada baris kedua menyatakan sumber 2, Halo pada baris ketiga menyatakan sumber 3 dan seterusnya sampai pada XI di baris kesepuluh menyatakan sumber 10. Sedangkan kolom menyatakan tujuan,

sehingga Simpati pada kolom pertama menyatakan tujuan 1, As pada kolom kedua menyatakan tujuan 2, Halo pada kolom ketiga menyatakan tujuan 3 dan seterusnya sampai pada XI di kolom sepuluh menyatakan tujuan 10. Pada jaringan komunikasi sumber juga bisa bertindak sebagai tujuan, sehingga sumber 1 dan tujuan 1 atau sumber 2 dan tujuan 2 dan seterusnya adalah sama.

Sumber mana yang akan berpasangan dengan tujuan sehingga meminimalkan biaya jaringan komunikasi ditentukan dengan mendefinisikan $c_{ij}x_{ij}$ sebagai biaya pengiriman SMS dari sumber i (1, 2, ..., 10) ke tujuan j (1, 2, ..., 10) jika sumber i dipasangkan dengan tujuan j . Secara matematis masalah di atas dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Minimalkan } z = & 100x_{11} + 100x_{12} + 100x_{13} + 150x_{14} + 150x_{15} + 150x_{16} + 150x_{17} + \\ & 150x_{18} + 150x_{19} + 150x_{110} + 88x_{21} + 88x_{22} + 88x_{23} + 149x_{24} + \\ & 149x_{25} + 149x_{26} + 149x_{27} + 149x_{28} + 149x_{29} + 149x_{210} + 125x_{31} + \\ & 125x_{32} + 125x_{33} + 150x_{34} + 150x_{35} + 150x_{36} + 150x_{37} + 150x_{38} + \\ & 150x_{39} + 150x_{310} + 150x_{41} + 150x_{42} + 150x_{43} + 100x_{44} + \\ & 100x_{45} + 100x_{46} + 100x_{47} + 150x_{48} + 150x_{49} + 150x_{410} + 149x_{51} + \\ & 149x_{52} + 149x_{53} + 99x_{54} + 99x_{55} + 99x_{56} + 99x_{57} + 149x_{58} + \\ & 149x_{59} + 149x_{510} + 150x_{61} + 150x_{62} + 160x_{63} + 100x_{64} + 100x_{65} + \\ & 25x_{66} + 100x_{67} + 150x_{68} + 150x_{69} + 150x_{610} + 125x_{71} + 125x_{72} + \\ & 125x_{73} + 125x_{74} + 125x_{75} + 125x_{76} + 125x_{77} + 125x_{78} + 125x_{79} + \\ & 125x_{710} + 136x_{81} + 136x_{82} + 136x_{83} + 136x_{84} + 136x_{85} + \\ & 136x_{86} + 136x_{87} + 136x_{88} + 136x_{89} + 136x_{810} + 150x_{91} + 150x_{92} + \\ & 150x_{93} + 150x_{94} + 150x_{95} + 150x_{96} + 150x_{97} + 150x_{98} + 150x_{99} + \\ & 150x_{910} + 250x_{101} + 250x_{102} + 250x_{103} + 250x_{104} + 250x_{105} + \\ & 250x_{106} + 250x_{107} + 250x_{108} + 250x_{109} + 250x_{1010} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{kendala 1 } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{110} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{210} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{310} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} + x_{410} = 1 \\ & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} + x_{510} = 1 \\ & x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} + x_{68} + x_{69} + x_{610} = 1 \\ & x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} + x_{78} + x_{79} + x_{710} = 1 \\ & x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} + x_{86} + x_{87} + x_{88} + x_{89} + x_{810} = 1 \\ & x_{91} + x_{92} + x_{93} + x_{94} + x_{95} + x_{96} + x_{97} + x_{98} + x_{99} + x_{910} = 1 \\ & x_{101} + x_{102} + x_{103} + x_{104} + x_{105} + x_{106} + x_{107} + x_{108} + x_{109} + x_{1010} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{kendala 2 } & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91} + x_{101} = 1 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} + x_{92} + x_{102} = 1 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} + x_{93} + x_{103} = 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} + x_{84} + x_{94} + x_{104} = 1 \\ & x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} + x_{85} + x_{95} + x_{105} = 1 \\ & x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} + x_{86} + x_{96} + x_{106} = 1 \\ & x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} + x_{67} + x_{77} + x_{87} + x_{97} + x_{107} = 1 \\ & x_{18} + x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} + x_{88} + x_{98} + x_{108} = 1 \\ & x_{19} + x_{29} + x_{39} + x_{49} + x_{59} + x_{69} + x_{79} + x_{89} + x_{99} + x_{109} = 1 \\ & x_{110} + x_{210} + x_{310} + x_{410} + x_{510} + x_{610} + x_{710} + x_{810} + x_{910} + x_{1010} = 1 \end{aligned}$$

Kendala 1 menyatakan bahwa setiap sumber dipasangkan hanya dengan satu tujuan dan kendala 2 menyatakan bahwa setiap tujuan dipasangkan dengan satu sumber. Jika $x_{ij} = 1$, maka fungsi tujuan akan mengambil biaya yang diperlukan untuk memasang sumber i pada tujuan j , sedangkan jika $x_{ij} = 0$, maka fungsi tujuan tidak akan mengambil biaya yang diperlukan untuk memasang sumber i pada tujuan j .

Tahap pertama dari metode *Branch and Bound* adalah membuat matriks biaya berdasarkan fungsi tujuan di atas. Matriks biaya yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & 100 & 100 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 \\ 88 & \infty & 88 & 149 & 149 & 149 & 149 & 149 & 149 & 149 \\ 125 & 125 & \infty & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 \\ 150 & 150 & 150 & \infty & 100 & 100 & 100 & 150 & 150 & 150 \\ 149 & 149 & 149 & 99 & \infty & 99 & 99 & 149 & 149 & 149 \\ 150 & 150 & 150 & 100 & 100 & \infty & 100 & 150 & 150 & 150 \\ 125 & 125 & 125 & 125 & 125 & 125 & \infty & 125 & 125 & 125 \\ 136 & 136 & 136 & 136 & 136 & 136 & 136 & \infty & 136 & 136 \\ 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & 150 & \infty & 150 \\ 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & 250 & \infty \end{bmatrix}$$

Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa sumber dapat bertindak sebagai tujuan sehingga sumber 1 adalah juga tujuan 1. Setiap sumber dan tujuan yang sama pada matriks biaya entrinya adalah ∞ , hal ini menyatakan bahwa sumber tidak dapat dipasangkan dengan tujuan karena dalam jaringan komunikasi pengiriman SMS antara sumber dan tujuan yang sama tidak diperbolehkan.

Tahap kedua adalah mengurangi setiap baris yang belum memiliki entri nol sehingga setiap baris mengandung paling sedikit satu buah entri nol dan semua entri lainnya non-negatif, yaitu dengan mengurangi setiap baris dengan nilai terendah dari baris tersebut. Nilai terendah pada baris 1 adalah 100 sehingga baris 1 dikurangi 100, nilai terendah pada baris 2 adalah 88 sehingga baris 2 dikurangi 88 dan seterusnya sehingga baris 3 dikurangi 125, baris 4 dikurangi 100, baris 5 dikurangi 99, baris 6 dikurangi 100, baris 7 dikurangi 125, baris 8 dikurangi 136, baris 9 dikurangi 150 dan baris 10 dikurangi 250. Matriks hasil pengurangan baris adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & \infty & 0 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & 0 & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & 50 & \infty & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 0 & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 0 & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

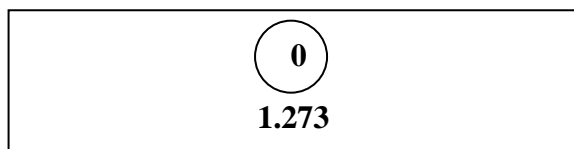
Tahap ketiga adalah mengurangi setiap kolom yang belum memiliki entri nol dengan nilai terendah dari kolom tersebut sehingga setiap kolom memiliki paling sedikit satu entri nol dan entri lainnya non-negatif. Pada matriks hasil pengurangan baris dapat dilihat bahwa setiap kolom telah memiliki entri nol yang berarti kolom pertama sampai dengan kolom terakhir hanya dapat dikurangi dengan nol. Sehingga matriks biaya setelah pengurangan kolom sama dengan matriks biaya setelah pengurangan baris.

Tahap keempat yaitu menjumlahkan pengurang setiap baris dan kolom dari matriks biaya menghasilkan nilai batas simpul 0 yaitu:

$$\begin{aligned} C_0 &= \text{pengurang baris} + \text{pengurang kolom} \\ &= (100 + 88 + 125 + 100 + 99 + 100 + 125 + 136 + 150 + 250) + \\ &= (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1.273. \end{aligned}$$

Nilai batas simpul 0 menyatakan persoalan jaringan komunikasi di atas paling tidak memiliki total biaya minimal Rp.1.273. Pengurangan baris dan kolom pada matriks biaya dilakukan agar setiap aras menghasilkan nilai optimal sehingga ketika melakukan perhitungan untuk aras berikutnya nilai batas-nilai batas pada simpul aras pertama tidak akan mengalami percabangan lagi.

Pohon pencarian saat ini baru berisi satu buah simpul yaitu simpul 0 dengan nilai batas 1.273.



Gambar 4.1 Simpul 0 pada pohon pencarian

Tahap kelima adalah mencari nilai batas simpul pada aras pertama, kedua, ketiga dan selanjutnya. Pencarian nilai batas simpul pada aras pertama adalah dengan menjadikan simpul 0 sebagai simpul-E yaitu simpul yang akan dicabangkan lagi berdasarkan nilai optimum. Setiap simpul pada aras pertama

menyatakan pemilihan tujuan untuk sumber pertama. Nilai dari setiap simpul menyatakan nilai batas yang dihitung dengan menggunakan rumus:

$$C_s = C_r + C_{ij} + r$$

dalam hal ini, C_s = nilai batas simpul s (simpul di pohon pencarian)

C_r = nilai batas simpul-E yang menghasilkan simpul s

C_{ij} = biaya jika memasang sumber i pada tujuan j

r = Jumlah semua pengurang baris dan kolom pada matriks yang bersesuaian untuk mencari nilai batas simpul s

1. Menentukan nilai batas simpul 1 yaitu jika sumber 1 dipasangkan dengan tujuan 2, matriks biayanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & \infty & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & \infty & 50 & \infty & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & \infty & 50 & 0 & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & \infty & 50 & 0 & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Ketika memilih sumber 1 dan tujuan 2 maka semua entri pada baris 1 dan kolom 2 diubah menjadi ∞ agar sumber 1 tidak berpasangan dengan tujuan lain dan tidak ada tujuan 2 yang berpasangan dengan sumber lain. Simpul 0 adalah simpul-E yang mempunyai nilai batas 1.273 sehingga pada aras pertama C_r adalah C_0 dan $C_{1,2}$ pada matriks di atas adalah 0.

Nilai r dihitung dengan menjumlahkan pengurang baris dan pengurang kolom kecuali baris 1 dan kolom 2 dengan nilai terendah pada baris dan kolom tersebut. Matriks biaya tanpa baris 1 dan kolom 2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & \infty & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 0 & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 0 & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} b2-0 \\ b3-0 \\ b4-0 \\ b5-0 \\ b6-0 \\ b7-0 \\ b8-0 \\ b9-0 \\ b10-0 \end{matrix}$$

Baris 2 sampai baris 10 pada matriks di atas memiliki entri terkecil yaitu nol sehingga hanya dapat dikurangi dengan nol, begitu juga dengan kolom 1 dan kolom 3 sampai kolom 10, sehingga nilai r adalah nol.

Nilai batas untuk simpul 1 pada pohon pencarian adalah:

$$\begin{aligned} C_s &= C_r + C_{ij} + r \\ C_l &= C_0 + C_{1,2} + r \\ &= 1.273 + 0 + 0 = 1.273. \end{aligned}$$

- Menentukan nilai batas simpul 2 yaitu jika sumber 1 dipasangkan dengan tujuan 3, matriks biayanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & 0 & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & \infty & 0 & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & \infty & 0 & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Ketika memilih sumber 1 dan tujuan 3 maka semua entri pada baris 1 dan kolom 3 diubah menjadi ∞ agar sumber 1 tidak berpasangan dengan tujuan lain dan tidak ada tujuan 3 yang berpasangan dengan sumber lain. Nilai C_0 adalah 1.273 dan $C_{1,3}$ adalah 0, nilai r adalah jumlah pengurang baris dan kolom dengan entri terendahnya kecuali baris 1 dan kolom 3. Baris 2 sampai baris 10 memiliki entri terendah yaitu nol, sehingga hanya dapat dikurangkan dengan nol. Begitu juga dengan kolom 1, kolom 2 dan kolom 4 sampai kolom 10, sehingga nilai r adalah nol.

Nilai batas untuk simpul 2 pada pohon pencarian adalah:

$$\begin{aligned} C_s &= C_r + C_{i,j} + r \\ C_2 &= C_0 + C_{1,3} + r \\ &= 1.273 + 0 + 0 = 1.273 \end{aligned}$$

3. Menentukan nilai batas simpul 3 yaitu jika sumber 1 dipasangkan dengan tujuan 4, matriks biayanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 50 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & \infty & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & 0 & \infty & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & 50 & \infty & 0 & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & \infty & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & \infty & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Ketika memilih sumber 1 dan tujuan 4 maka semua entri pada baris 1 dan kolom 4 diubah menjadi ∞ agar sumber 1 tidak berpasangan dengan tujuan lain dan tidak ada tujuan 4 yang berpasangan dengan sumber lain. Nilai C_0 adalah 1.273 dan $C_{1,4}$ adalah 50. Nilai r dihitung dengan menjumlahkan pengurang baris dan kolom kecuali baris 1 dan kolom 4. Baris 2 sampai baris 10 sudah memiliki entri nol, begitu juga dengan kolom 1 sampai kolom 3 dan kolom 5 sampai kolom 10, sehingga nilai r adalah nol.

Nilai batas untuk simpul 3 pada pohon pencarian adalah:

$$\begin{aligned} C_s &= C_r + C_{i,j} + r \\ C_3 &= C_0 + C_{1,4} + r \\ &= 1.273 + 50 + 0 = 1.323 \end{aligned}$$

4. Menentukan nilai batas simpul 4 yaitu jika sumber 1 dipasangkan dengan tujuan 5, matriks biayanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & 50 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & 61 & \infty & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & 0 & \infty & 25 & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & 50 & \infty & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 0 & \infty & 0 & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 0 & \infty & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Ketika memilih sumber 1 dan tujuan 5 maka semua entri pada baris 1 dan kolom 5 diubah menjadi ∞ agar sumber 1 tidak berpasangan dengan tujuan lain dan tidak ada tujuan 5 yang berpasangan dengan sumber lain. Nilai C_0 adalah 1.273 dan $C_{1,5}$ adalah 50. Nilai r dihitung dengan menjumlahkan pengurang baris dan kolom kecuali baris 1 dan kolom 5. Baris 2 sampai baris 10 sudah memiliki entri nol, begitu juga dengan kolom 1 sampai kolom 4 dan kolom 6 sampai kolom 10, sehingga nilai r adalah nol.

Nilai batas untuk simpul 4 pada pohon pencarian adalah:

$$\begin{aligned} C_s &= C_r + C_{i,j} + r \\ C_4 &= C_0 + C_{1,5} + r \\ &= 1.273 + 50 + 0 = 1.323 \end{aligned}$$

5. Menentukan nilai batas simpul 5 yaitu jika sumber 1 dipasangkan dengan tujuan 6, matriks biayanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 50 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & 61 & 61 & \infty & 61 & 61 & 61 & 61 \\ 0 & 0 & \infty & 25 & 25 & \infty & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & 50 & \infty & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 0 & \infty & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 0 & 0 & \infty & 0 & 50 & 50 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Ketika memilih sumber 1 dan tujuan 6 maka semua entri pada baris 1 dan kolom 6 diubah menjadi ∞ agar sumber 1 tidak berpasangan dengan tujuan lain dan tidak ada tujuan 6 yang berpasangan dengan sumber lain. Nilai C_0 adalah 1.273 dan $C_{1,6}$ adalah 50. Nilai r dihitung dengan menjumlahkan pengurang baris

dan kolom kecuali baris 1 dan kolom 6. Baris 2 sampai baris 10 sudah memiliki entri nol, begitu juga dengan kolom 1 sampai kolom 5 dan kolom 7 sampai kolom 10, sehingga nilai r adalah nol.

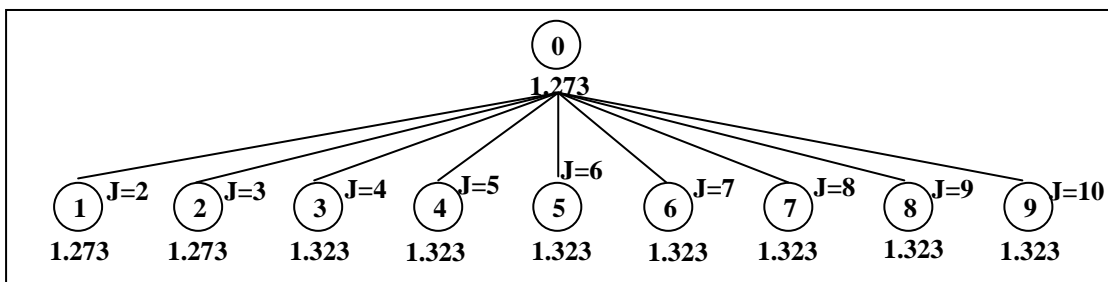
Nilai batas untuk simpul 5 pada pohon pencarian adalah:

$$C_s = C_r + C_{i,j} + r$$

$$C_5 = C_0 + C_{1,6} + r$$

$$= 1.273 + 50 + 0 = 1.323$$

Setelah nilai batas semua simpul yang memasangkan sumber 1 dengan tujuan 2 sampai tujuan 10 didapatkan pohon pencarian sebagai berikut:

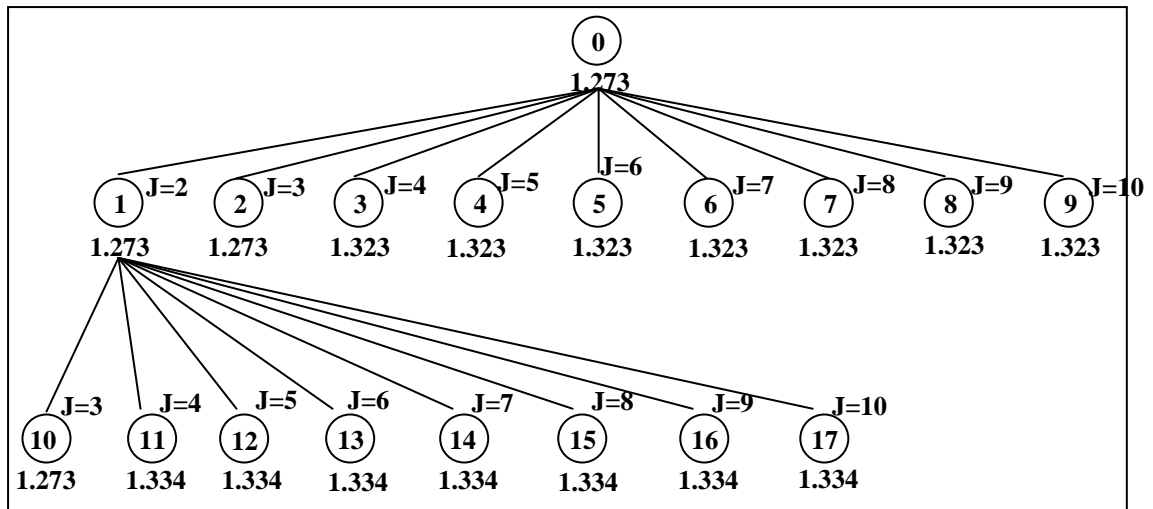


Gambar 4.2. Pohon pencarian sampai aras pertama

Pohon pencarian memperlihatkan bahwa simpul yang mempunyai nilai minimum adalah simpul 1 dan simpul 2. Simpul 1 adalah pemasangan sumber 1 dengan tujuan 2 dan simpul 2 adalah pemasangan sumber 1 dengan tujuan 3. Jadi, jaringan komunikasi akan optimal jika sumber 1 dipasangkan dengan tujuan 2 atau tujuan 3.

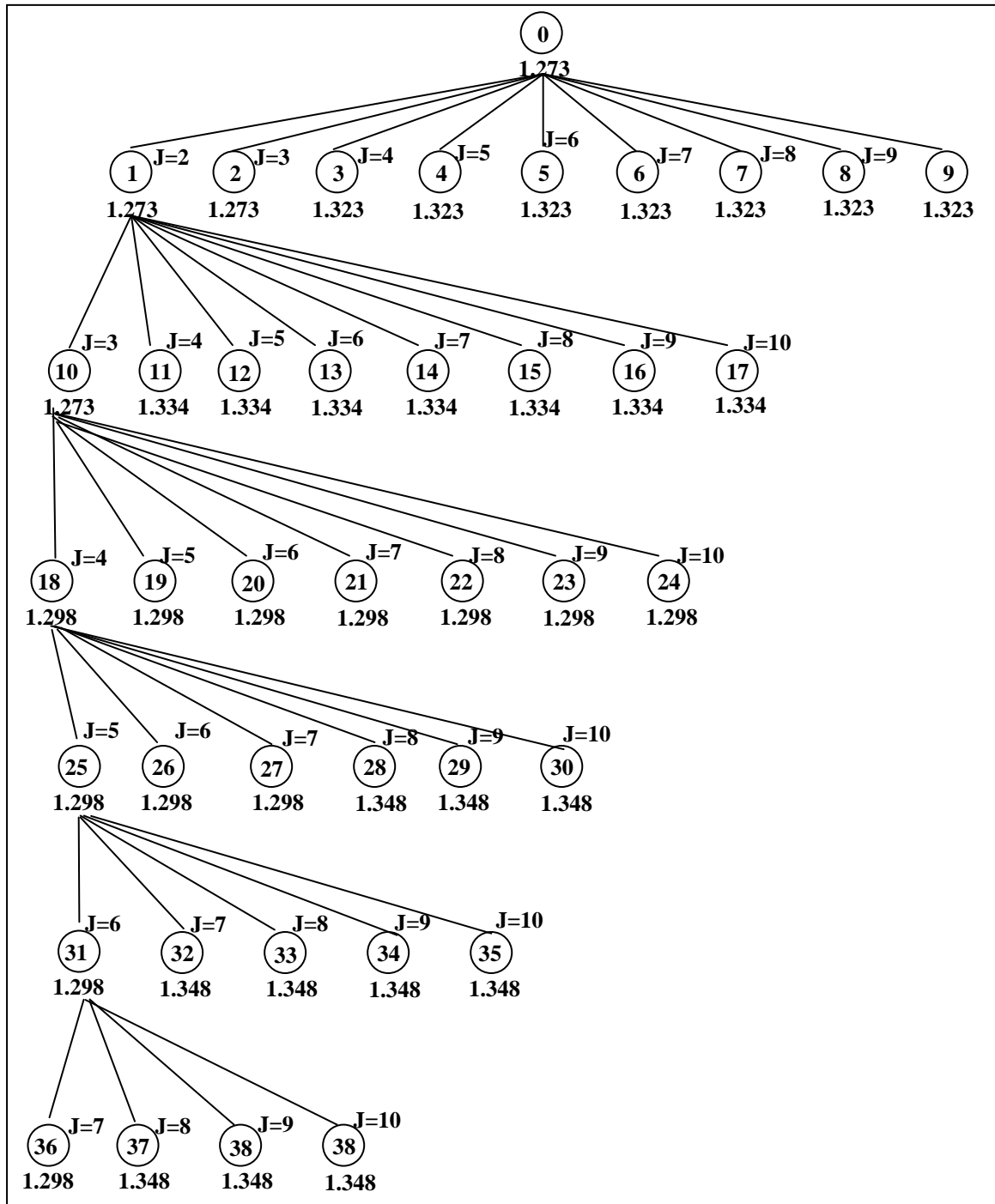
Simpul 1 dan simpul 2 adalah simpul dengan nilai terendah, maka simpul ini dijadikan sebagai simpul-E yaitu simpul yang akan dicabangkan lagi, sedangkan simpul yang lainnya akan dihentikan. Nilai C_r sekarang berubah dari C_0 menjadi C_1 jika yang dicabangkan simpul 1 atau C_2 jika yang dicabangkan simpul 2. Pencabangan dapat dilakukan melalui simpul 1 atau simpul 2, tetapi untuk mempercepat penentuan penyusunan jaringan komunikasi maka simpul yang dicabangkan cukup satu simpul, karena nilai optimum jika dicabangkan dari simpul 1 atau simpul 2 adalah sama yang berbeda adalah jalur pengiriman SMSnya saja.

Melalui perhitungan yang mirip dengan perhitungan paa aras pertama di dapatkan pohon pencarian aras kedua sebagai berikut:



Gambar 4.3 Pohon pencarian sampai aras kedua

Pohon pencarian memperlihatkan bahwa simpul-E adalah simpul 10, sehingga C_r berubah dari C_1 menjadi C_{10} . Berikutnya adalah pencarian aras ketiga, keempat dan seterusnya terakhir sampai aras ke 10. Setiap nilai batas minimum pada aras akan dijadikan sebagai simpul-E. Jika terdapat lebih dari satu nilai batas minimum, maka boleh dipilih secara bebas simpul minimum mana yang akan dijadikan simpul-E. Sehingga untuk semua perhitungan didapatkan aras ke 6 sebagai berikut:



Gambar 4.7 Pohon Pencarian Sampai Aras Keenam

Pencarian nilai batas pada aras ketujuh, yaitu memasang sumber 7 dengan tujuan yang belum berpasangan. Nilai minimum pada aras keenam adalah 1.298 pada simpul 36, maka simpul ini dijadikan sebagai simpul-E sehingga C_r pada aras keenam ini adalah C_{36} . Matriks biaya pada simpul 36 adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

Semua entri yang tersisa jika simpul 36 sebagai simpul-E adalah 0, ini berarti bahwa tujuan manapun yang dipasangkan dengan sumber 7 menghasilkan nilai optimum kecuali tujuan yang sudah berpasangan dan tujuan yang sama dengan sumber yaitu tujuan 7. Begitu juga untuk aras kedelapan yaitu sumber 8 dapat dipasangkan dengan tujuan yang belum memiliki pasangan dan bukan tujuan 8, demikian juga dengan aras kesembilan dan aras kesepuluh.

Gambar 4.7 adalah pohon pencarian sampai aras keenam, karena jumlah sumber dan tujuannya adalah 10 maka pohon pencarian seharusnya memiliki sepuluh aras. Tetapi seperti dijelaskan sebelumnya bahwa ketika dipilih simpul 36 sebagai simpul-E, maka aras ketujuh sampai dengan aras kesepuluh dapat ditentukan secara bebas dengan syarat tidak boleh memilih tujuan yang sama dengan sumber dan tidak boleh memilih tujuan yang sudah berpasangan.

Gambar 4.7 juga menjelaskan salah satu susunan jaringan komunikasi yang optimal. Pada aras pertama dipilih simpul 1 yang berarti sumber 1 berpasangan dengan tujuan 2 yaitu pemilik kartu Simpati akan mengirim sms ke pemilik kartu As, pada aras kedua dipilih simpul 10 yang berarti sumber 2 berpasangan dengan tujuan 3 yaitu pemilik kartu As akan mengirim sms ke pemilik kartu Halo, pada aras ketiga dipilih simpul 18 yang berarti sumber 3 berpasangan dengan tujuan 4 yaitu pemilik kartu Halo mengirim sms ke pemilik kartu matrix, pada aras keempat dipilih simpul 25 yang berarti sumber 4 berpasangan dengan tujuan 5 yaitu pemilik kartu matrix mengirim sms ke pemilik kartu mentari, pada aras kelima dipilih simpul 31 yang berarti sumber 5 berpasangan dengan tujuan 6 yaitu pemilik kartu mentari mengirim sms ke pemilik kartu starone, pada aras keenam dipilih simpul 36 yang berarti pemilik kartu starone mengirim sms ke pemilik kartu Im3, setelah itu pemilik kartu Im3 dapat mengirim SMS ke pemilik kartu flexi, pemilik kartu flexi mengirim sms ke pemilik kartu fren, pemilik kartu fren mengirim sms ke pemilik kartu xl dan terakhir pemilik kartu xl mengirim sms ke pemilik kartu simpati.

x_{ij} yang mempunyai nilai 1 adalah $x_{1,2}, x_{2,3}, x_{3,4}, x_{4,5}, x_{5,6}, x_{6,7}, x_{7,8}, x_{8,9}, x_{9,10}, x_{10,1}$, sedangkan x_{ij} yang lainnya memiliki nilai 0. Sehingga Solusi optimal dari jaringan komunikasi ini adalah $100x_{12} + 88x_{23} + 150x_{34} + 100x_{45} + 99x_{56} + 100x_{67} + 125x_{78} + 136x_{89} + 150x_{910} + 250x_{101} = 100 + 88 + 150 + 100 + 99 + 100 + 125 + 136 + 150 + 250 = 1.298$.

4. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Salah satu solusi optimal dari jaringan komunikasi yang didapat dalam penelitian ini adalah pengiriman sms dari pemilik kartu simpati ke pemilik kartu As ke pemilik kartu Halo ke pemilik kartu Matrix ke pemilik kartu Mentari ke pemilik kartu Starone ke pemilik kartu Im3 ke pemilik kartu flexi ke pemilik kartu Fren ke pemilik kartu xl ke pemilik kartu Simpati. Secara ringkas dapat ditulis sebagai berikut : Simpati → As → Halo → Matrix → Mentari → Starone → im3 → Flexi → Fren → xl → Simpati.
2. Biaya minimal yang diperlukan untuk melakukan satu kali pengiriman SMS dalam jaringan komunikasi dengan sepuluh varian operator yang berbeda adalah sebesar Rp. 1.298.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adyatman, MM. 2007. Metode Branch and Bound dalam Kegunaannya Memecahkan Assignment Problem.
- [2] Hillier, Frederick S dan Gerald J. Lieberman. 2005. Pengantar Riset Operasi (Terjemahan). Erlangga. Jakarta.
- [3] Munawar H, 2007. Penerapan Algoritma Branch And Bound Dalam Optimasi Assigment Problem.
- [4] Subagyo, P. dkk. 1983. Dasar-Dasar Operation Research. Edisi ke-2. BPFE.Yogyakarta.
- [5] Sumitro, YK. 2007. Penyusunan Jarkom HMIF ITB dengan Menggunakan Algoritma Branch and Bound.
http://www.informatika.org/~rinaldi/Stmik/20062007/Makalah_2007/MakalahSTMIK2007-127.pdf.
- [6] Taha, Hamdy A 1997. Operations Research an Introduction, sixth edition Upper saddle River. Prentice Hall, Inc. New Jersey.
- [7] Wicaksono, AF. 2008. Penggunaan Metode Branch And Bound With Search Tree Untuk Menyelesaikan Persoalan Pedagang Keliling Pada Graf Lengkap Sebagai Pengganti Metode Exhaustive Enumeration.