

BIFURKASI MUNDUR PADA MODEL EPIDEMI SEIV DENGAN LAJU INSIDENSI NONLINEAR

Gunawan

*Program Studi Pendidikan Teknologi Informasi
STKIP PGRI Banjarmasin*

*Jl. Sultan Adam Komp. H. Iyus No. 18 Banjarmasin
Email : gunawan.stkipbjm@gmail.com*

ABSTRAK

Pada penelitian ini, dibentuk model epidemi SEIV pada penyebaran penyakit mematikan dengan memperhatikan vaksinasi, transmisi penyakit secara horizontal dan vertikal, serta laju insidensi nonlinear. Analisis bifurkasi pada model dilakukan dengan memperhatikan bilangan reproduksi dasar R_0 . Model yang dibentuk menunjukkan adanya kemungkinan terjadi bifurkasi mundur yang ditandai dengan munculnya dua titik ekuilibrium endemik saat nilai $R_0 < 1$.

Kata Kunci: bifurkasi mundur, model epidemi SEIV, laju insidensi nonlinear.

ABSTRACT

In this research, an SEIV epidemic model with vaccination, horizontal and vertical transmission, and nonlinear incidence rate is formulated. Local stability and bifurcation analysis in this model is presented in terms of the basic reproduction number R_0 . This model exhibits a backward bifurcation possibility, that is, the appearance of two endemic equilibria although the basic reproduction number R_0 is less than the threshold 1.

Keywords: backward bifurcation, SEIV epidemic model, nonlinear incidence rate.

1. PENDAHULUAN

Terdapat berbagai jenis penyakit yang dapat menular tidak hanya secara horizontal, namun juga menular secara vertikal. Penularan penyakit secara horizontal dapat terjadi melalui kontak langsung maupun tidak langsung, sedangkan penularan secara vertikal dari ibu ke bayi dapat terjadi melalui plasenta pada saat bayi berada dalam kandungan atau menular ke bayi yang baru lahir pada saat proses kelahiran normal. Beberapa penyakit bahkan dapat bersifat fatal atau menyebabkan kematian bagi penderita jika tidak diberikan pencegahan atau pengobatan, khususnya pada bayi yang baru lahir. Oleh karena itu, diperlukan suatu upaya untuk mengendalikan penularan penyakit, antara lain dengan memberikan vaksin. Penularan penyakit dapat dipelajari dengan menggunakan model matematika, dalam hal ini disebut dengan model epidemi. Dengan menggunakan model epidemi, dapat ditentukan langkah apa saja yang dapat dilakukan untuk menanggulangnya. Dengan mempertimbangkan karakteristik penyakit di atas, peneliti dalam penelitian ini menggunakan model epidemi SEIV yang merupakan pengembangan dari penelitian yang telah dilakukan oleh Long dan Xiang (2011) dan Gunawan (2014) dengan menambahkan asumsi bahwa penyakit yang dimodelkan adalah penyakit yang mematikan.

Perilaku dinamik model SEIV yang akan diselidiki adalah keberadaan (eksistensi) titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, dan kemungkinan terjadinya bifurkasi pada nilai parameter tertentu. Analisis bifurkasi dilakukan untuk melihat apakah perubahan nilai parameter tertentu menyebabkan perubahan perilaku dinamik dari model epidemi yang dibentuk.

Terkait eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, serta analisis bifurkasi pada model epidemi SEIV yang dibentuk, perlu diperhatikan bilangan reproduksi dasar R_0 . Pada beberapa kasus model epidemi, pada saat $R_0 < 1$, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik dan tidak ada titik ekuilibrium endemik, sedangkan pada saat $R_0 > 1$, titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan muncul titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik. Fenomena seperti ini yang terjadi pada model epidemi disebut dengan bifurkasi maju. Selanjutnya perlu diselidiki pula kemungkinan terjadinya bifurkasi mundur yang ditandai munculnya titik ekuilibrium endemik pada saat $R_0 < 1$. Jika bifurkasi mundur terjadi maka penyakit belum tentu akan menghilang meskipun $R_0 < 1$ [1].

Adapun salah satu faktor yang mempengaruhi perilaku dinamik dari model epidemi yang dibentuk adalah laju insidensi yang digunakan. Laju insidensi adalah laju munculnya infeksi baru [8]. Pada model epidemi sering kali digunakan laju insidensi bilinear $\beta S(t)I(t)$, dengan $S(t)$ dan $I(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah individu yang rentan penyakit dan jumlah individu yang terinfeksi sekaligus memiliki kemampuan untuk menginfeksi individu lain pada saat t . Laju insidensi bilinear $\beta S(t)I(t)$ menunjukkan kenaikan laju kontak β sebanding dengan kepadatan populasi [6]. Selanjutnya Liu dkk (dalam [8]) memperkenalkan laju insidensi $\beta S^p(t)I^q(t)$ dengan mempertimbangkan adanya faktor kejenuhan atau adanya pajanan (*exposure*) jamak sebelum terjadinya infeksi. Pajanan adalah peristiwa yang menimbulkan risiko penularan [14]. Pajanan berkaitan erat dengan bagaimana virus atau bakteri penyebab penyakit masuk ke dalam tubuh. [12] mengkombinasikan kedua bentuk laju insidensi di atas dan memperkenalkan laju insidensi nonlinear $\beta S(t)I(t)[1 + \alpha I^{p-1}(t)]$, dengan $\beta > 0$, $\alpha > 0$ dan $p \geq 1$.

Pada penelitian ini, model epidemi SEIV yang dibentuk menggunakan laju insidensi nonlinear $\beta S(t)I(t)[1 + \alpha I^{p-1}(t)]$ dengan $p = 2$ yang memasukkan faktor naiknya laju insidensi yang diakibatkan oleh pajanan ganda dalam waktu yang singkat. Infeksi baru yang diakibatkan oleh pajanan ganda muncul dengan laju $\alpha \beta S(t)I^2(t)$, sedangkan infeksi baru yang diakibatkan oleh kontak tunggal muncul dengan laju $\beta S(t)I(t)$ [12].

2. TINJAUAN PUSTAKA

Model epidemi SIR pertama kali dikembangkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Selanjutnya model epidemi SIR dikembangkan menjadi model epidemi lain seperti SIS, SIRS, SEIR, SEIRS dan SEIV. Adapun model epidemi yang digunakan dalam penelitian ini adalah model epidemi SEIV yang terkait dengan masa laten dan pemberian vaksin. Pada model epidemi SEIV yang dibentuk, digunakan laju insidensi nonlinear $\beta SI(1 + \alpha I^{p-1})$ dengan $\beta > 0$, $\alpha > 0$ dan $p = 2$ yang dijelaskan [12].

Perlu diketahui bahwa model epidemi SEIV disusun ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Oleh karena itu, terlebih dahulu perlu dijamin eksistensi dan ketunggalan solusi dari sistem persamaan diferensial nonlinear

yang dibentuk, termasuk eksistensi titik (solusi) ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial yang dibentuk. Teorema yang menjamin eksistensi dan ketunggalan solusi dari sistem persamaan diferensial diberikan oleh [11]. Adapun pada model epidemi SEIV yang dibentuk diselidiki eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Pada penelitian ini, titik ekuilibrium endemik merupakan akar dari suatu persamaan polinom sehingga eksistensi titik ekuilibrium endemik diselidiki dengan menggunakan Aturan Tanda Descartes yang dijelaskan oleh [13].

Adapun definisi mengenai himpunan invarian dijelaskan oleh Wiggins [13]. Definisi matriks Jacobian dari suatu fungsi di titik tertentu pada domainnya dan nilai eigen dari suatu matriks diberikan oleh Luenberger [10]. Sehubungan dengan pencarian nilai eigen, ditemui bentuk polinomial karakteristik, multiplisitas aljabar dari nilai eigen, nilai eigen sederhana, vektor eigen kanan dan vektor eigen kiri yang dijelaskan oleh Luenberger [10]. Selanjutnya, Wiggins [13] menjelaskan mengenai tes Routh-Hurwitz untuk menentukan banyaknya pembuat nol dari suatu persamaan polinom yang memiliki bagian real negatif. Hal ini terkait dengan identifikasi nilai eigen untuk mengetahui apakah titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal atau tidak stabil.

Pada umumnya, eksistensi dari titik ekuilibrium endemik berkaitan dengan bilangan reproduksi dasar yang definisinya diberikan oleh Diekmann dan Heesterbeek [3], sedangkan eksistensi dari titik ekuilibrium bebas penyakit tidak bergantung pada bilangan reproduksi dasar. Castillo-Chavez, dkk [2] menjelaskan mengenai metode untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar.

Salah satu bagian yang sangat penting untuk diteliti adalah kemungkinan terjadinya bifurkasi mundur pada model epidemi. Castillo-Chavez dan Song [1] menjelaskan mengenai bifurkasi mundur yang terjadi pada titik ekuilibrium nonhiperbolik saat diperoleh nilai eigen sederhana 0. Adapun definisi mengenai bifurkasi diberikan oleh Kuznetsov [7].

3. METODE

Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dengan mengumpulkan bahan literatur serta bahan pustaka sebagai referensi untuk mempelajari model penularan penyakit SEIV. Langkah pertama adalah menentukan asumsi-asumsi yang berkaitan dengan model epidemi SEIV sesuai dengan karakteristik penyakit yang dimodelkan, kemudian dilanjutkan dengan membuat diagram transfer berdasarkan asumsi yang telah dibuat dan disajikan menjadi model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear.

Pada model epidemi SEIV yang telah dibentuk, diselidiki mengenai eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit serta eksistensi, ketunggalan dan batasan solusi pada sistem persamaan diferensial nonlinear yang digunakan. Selain itu, dicari pula bilangan reproduksi dasar dan pengaruhnya terhadap eksistensi titik ekuilibrium. Selanjutnya dilakukan analisis bifurkasi.

4. PEMBAHASAN

4.1 Pembentukan Model

Model epidemi SEIV (*susceptible, exposed, infectious, vaccinated*) digunakan untuk memodelkan penularan penyakit yang memiliki masa inkubasi

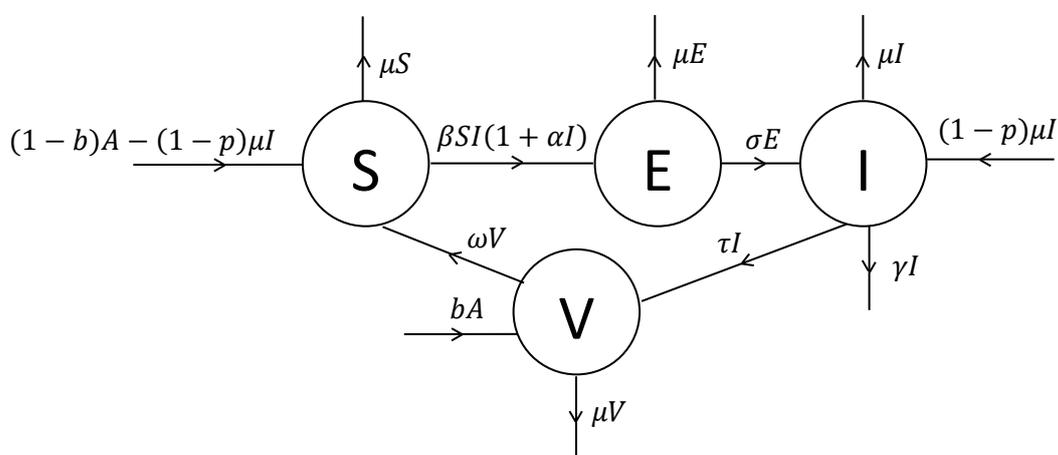
yang tidak singkat dan adanya pemberian vaksin pada suatu populasi. Populasi dibagi ke dalam 4 kelas, yaitu kelas S (*susceptible*/ rentan) yang menyatakan kelas individu yang rentan tertular penyakit, kelas E (*exposed*/ laten) yang menyatakan kelas individu yang sudah terinfeksi namun belum memiliki kemampuan menularkan penyakit kepada individu yang berada di kelas S , kelas I (*infectious*/ infeksi) yang menyatakan kelas individu yang telah terinfeksi dan memiliki kemampuan menularkan penyakit kepada individu yang berada di kelas S , dan kelas V (*vaccinated*/ vaksin) yang menyatakan kelas individu yang memiliki kekebalan terhadap penyakit yang sedang dibicarakan yang diperoleh melalui vaksin maupun pengobatan. Pada model ini, $S(t)$, $V(t)$, $E(t)$, $I(t)$ dan $N(t)$ berturut-turut menyatakan jumlah individu pada kelas rentan, kelas vaksin, kelas laten, kelas infeksi dan jumlah individu dalam populasi pada saat t , dengan $N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + I(t)$. Pada pembahasan lebih lanjut, $N(t)$, $S(t)$, $V(t)$, $E(t)$ dan $I(t)$ berturut-turut cukup ditulis N , S , V , E dan I . Pada model epidemi SEIV dalam penelitian ini, penyakit yang dibicarakan adalah penyakit mematikan yang menular secara horizontal dan vertikal. Selain itu, kekebalan yang diperoleh dari vaksin yang diberikan tidak bersifat permanen.

Penularan penyakit secara horizontal yang terjadi karena adanya kontak antara individu pada kelas S dan individu pada kelas I diasumsikan menggunakan laju insidensi nonlinear $\beta SI(1 + \alpha I)$. Penggunaan laju insidensi $\beta SI(1 + \alpha I)$ dilakukan dengan mempertimbangkan faktor naiknya laju insidensi yang diakibatkan oleh pajanan (*exposure*) ganda dalam waktu yang singkat. Adapun asumsi-asumsi lain yang digunakan pada model ini adalah sebagai berikut:

1. Jumlah individu dalam populasi tidak konstan. Ada rekrutmen yang berasal dari kelahiran dan imigrasi yang masuk ke dalam kelas S , dinotasikan dengan A .
2. Vaksin diberikan kepada bayi yang baru lahir maupun imigran yang masuk ke dalam populasi yang tidak tertular penyakit (rekrutmen) dengan proporsi sebesar b .
3. Individu yang baru terinfeksi tidak dapat langsung menularkan penyakit dan masuk ke kelas E .
4. Individu yang baru terinfeksi akan menjadi individu yang mampu menularkan penyakit dan masuk ke kelas I dengan laju σ . Nilai $\frac{1}{\sigma}$ menyatakan masa inkubasi penyakit.
5. Ada kelahiran pada kelas I dan dapat terjadi penularan vertikal. Bayi yang baru lahir merupakan individu yang rentan tertular penyakit dengan proporsi p , sedangkan sisanya merupakan individu yang terinfeksi dan mampu menularkan penyakit.
6. Ada kematian alami yaitu kematian yang tidak diakibatkan oleh penyakit yang sedang dibicarakan, terjadi pada setiap kelas. Laju kematian alami dinotasikan dengan μ .
7. Penyakit bersifat fatal, yang berarti ada kematian yang diakibatkan oleh penyakit yang dimodelkan, terjadi pada kelas I . Laju kematian yang disebabkan oleh penyakit dinotasikan dengan γ .
8. Laju kelahiran sama dengan laju kematian alami, dinotasikan dengan μ . Nilai $\frac{1}{\mu}$ menyatakan rata-rata angka harapan hidup.

9. Individu yang menularkan penyakit diberikan pengobatan dengan laju τ sehingga mendapat kekebalan sementara dan masuk ke kelas V . Nilai $\frac{1}{\tau}$ menyatakan masa infeksi saat suatu individu yang terinfeksi mampu menularkan penyakit.
10. Kekebalan yang diperoleh dari vaksin bersifat tidak permanen, yang berarti individu yang telah diberikan vaksin dapat kembali menjadi rentan tertular penyakit. Kekebalan yang diperoleh dari vaksin menghilang dengan laju ω . Nilai $\frac{1}{\omega}$ menyatakan masa kekebalan tubuh terhadap suatu penyakit yang diperoleh dari pemberian vaksin maupun pengobatan.

Dari asumsi-asumsi di atas dapat dibentuk diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram transfer pada model epidemi SEIV

Kemudian, berdasarkan diagram transfer di atas, dibentuk suatu model matematika yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = (1-b)A - \beta SI(1 + \alpha I) - \mu S + \omega V - (1-p)\mu I \\ \frac{dV}{dt} = bA - \mu V - \omega V + \tau I \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI(1 + \alpha I) - \mu E - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \tau I - p\mu I - \gamma I. \end{array} \right. \quad (1)$$

Semua parameter pada Sistem (1) bernilai positif dengan:

- A : jumlah rekrutmen yang masuk ke dalam populasi (diasumsikan rentan),
- b : proporsi rekrutmen yang diberikan vaksin,
- β : laju kontak antara kelas rentan (S) dengan kelas infeksi (I),
- α : faktor naiknya laju insidensi akibat paparan ganda dalam waktu singkat,
- μ : laju kelahiran, sama dengan laju kematian alami,
- γ : laju kematian yang diakibatkan oleh penyakit,
- σ : laju perpindahan individu dari kelas laten (E) ke kelas infeksi (I),

τ : laju pengobatan yang diberikan kepada individu pada kelas infeksi (I),
 ω : laju kehilangan kekebalan yang diperoleh dari vaksin, dan
 p : proporsi keturunan yang rentan tertular penyakit yang berasal dari kelahiran pada kelas infeksi (I).

Dengan mempertimbangkan bahwa jumlah individu pada masing-masing kelas tidak negatif, maka diberikan nilai awal

$$S(0) \geq 0, \quad V(0) \geq 0, \quad E(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0.$$

4.2 Eksistensi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit merepresentasikan kondisi populasi yang bebas dari penyakit, yang berarti tidak ada individu yang terinfeksi di dalam populasi tersebut dan akan terus berada dalam kondisi bebas dari penyakit sepanjang waktu. Oleh karena itu, $E = 0$ dan $I = 0$.

Teorema 1 Sistem (1) selalu memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit

$$\mathbf{P}_0 = \left[\frac{A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)} \quad \frac{bA}{(\mu + \omega)} \quad 0 \quad 0 \right]^T.$$

Untuk pembahasan selanjutnya, Sistem (1) dapat ditulis menjadi: $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [S \ V \ E \ I]^T$ dan $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$. Dengan demikian, matriks Jacobian dari \mathbf{f} di $\mathbf{X} = [S \ V \ E \ I]^T$ adalah

$$J\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -\beta I(1 + \alpha I) - \mu & \omega & 0 & -\beta S(1 + 2\alpha I) - (1 - p)\mu \\ 0 & -\mu - \omega & 0 & \tau \\ \beta I(1 + \alpha I) & 0 & -\mu - \sigma & \beta S(1 + 2\alpha I) \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau - p\mu - \gamma \end{bmatrix}.$$

4.3 Eksistensi, Ketunggalan dan Batasan Solusi

Diberikan himpunan

$$\Sigma = \{(S, V, E, I) | S > 0, V > 0, E \geq 0, I \geq 0\}.$$

Diperhatikan bahwa interior $\Sigma = \{(S, V, E, I) | S > 0, V > 0, E > 0, I > 0\}$ merupakan himpunan terbuka di \mathbb{R}^4 . Selanjutnya karena diketahui

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}(\mathbf{X}) &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}) \right]_{i,j=1,2,3,4}, \text{ dengan } \mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [S \ V \ E \ I]^T \\ &= J\mathbf{f}(\mathbf{X}) \\ &= \begin{bmatrix} -\beta I(1 + \alpha I) - \mu & \omega & 0 & -\beta S(1 + 2\alpha I) - (1 - p)\mu \\ 0 & -\mu - \omega & 0 & \tau \\ \beta I(1 + \alpha I) & 0 & -\mu - \sigma & \beta S(1 + 2\alpha I) \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau - p\mu - \gamma \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jelas bahwa derivatif parsial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, dengan $i, j = 1, 2, 3, 4$, ada dan kontinu pada interior Σ . Akibatnya, fungsi $\mathbf{f} \in C^1(\text{interior } \Sigma)$. Oleh karena $\mathbf{f} \in C^1(\text{interior } \Sigma)$, maka untuk setiap nilai awal $S(0) > 0, V(0) > 0, E(0) > 0$ dan $I(0) > 0$ yang diberikan, Sistem (1) memiliki solusi tunggal pada interior Σ untuk setiap $t \geq 0$. Dengan demikian, untuk setiap nilai awal yang diberikan pada himpunan Σ , Sistem (1) memiliki solusi tunggal pada himpunan Σ untuk setiap $t \geq 0$.

Perlu diingat bahwa himpunan semua titik ekuilibrium merupakan himpunan invarian. Oleh karena itu, jelas bahwa himpunan Σ di atas merupakan himpunan invarian positif pada Sistem (1).

Selanjutnya, dengan menjumlahkan semua persamaan pada Sistem (1) diperoleh:

$$\frac{d}{dt}(S + V + E + I) = \mu \left[\frac{A}{\mu} - (S + V + E + I) \right] - \gamma I \leq \mu \left[\frac{A}{\mu} - (S + V + E + I) \right]$$

dan $\limsup_{t \rightarrow \infty} (S + V + E + I) \leq \frac{A}{\mu}$. Oleh karena itu, jelas bahwa

$$\Sigma^1 = \left\{ (S, V, E, I) \mid S > 0, V > 0, E \geq 0, I \geq 0, S + V + E + I \leq \frac{A}{\mu} \right\}$$

merupakan himpunan invarian positif dari Sistem (1). Untuk pembahasan selanjutnya, perilaku dinamik dari Sistem (1) yang diselidiki hanya dibatasi pada himpunan Σ^1 .

4.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar R_0 , digunakan metode yang dikembangkan oleh Castillo-Chavez dkk (2001). Sistem (1) dituliskan kembali ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{f}([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) \\ \frac{dY}{dt} &= g([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) \\ \frac{dZ}{dt} &= h([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) \end{aligned} \quad (2)$$

dengan $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2]^T = [S \ V]^T \in \mathbb{R}^2$, $Y = E \in \mathbb{R}$ dan $Z = I \in \mathbb{R}$.

Akibatnya

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{f}([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) = \begin{bmatrix} (1-b)A - \beta X_1 Z(1 + \alpha Z) - \mu X_1 + \omega X_2 - (1-p)\mu Z \\ bA - \mu X_2 - \omega X_2 + \tau Z \end{bmatrix},$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dE}{dt} = g([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) = \beta X_1 Z(1 + \alpha Z) - \mu Y - \sigma Y,$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dI}{dt} = h([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) = \sigma Y - \tau Z - p\mu Z - \gamma Z.$$

Jelas bahwa $h([\mathbf{X} \ 0 \ 0]^T) = 0$.

Titik ekuilibrium bebas penyakit dari Sistem (2) di atas adalah $\mathbf{U}_0 = [\mathbf{X}^* \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$, dengan

$$\mathbf{X}^* = [S^* \ V^*]^T = \begin{bmatrix} \frac{A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)} & \frac{bA}{(\mu + \omega)} \end{bmatrix}^T,$$

yang memenuhi $\mathbf{f}([\mathbf{X}^* \ 0 \ 0]^T) = \mathbf{0}$, $g([\mathbf{X}^* \ 0 \ 0]^T) = 0$ dan $h([\mathbf{X}^* \ 0 \ 0]^T) = 0$.

Selanjutnya, diperoleh $g([\mathbf{X}^* \ Y \ Z]^T) = 0$ secara implisit menyatakan suatu fungsi $Y = \tilde{g}([\mathbf{X}^* \ Z]^T)$.

Selanjutnya, karena $h([\mathbf{X} \ Y \ Z]^T) = \sigma Y - \tau Z - p\mu Z - \gamma Z$, maka

$$h([\mathbf{X}^* \ \tilde{g}([\mathbf{X}^* \ Z]^T) \ Z]^T) = S^* \frac{\beta}{(\mu + \sigma)} Z(1 + \alpha Z) - \tau Z - p\mu Z - \gamma Z$$

dan

$$D_Z h([\mathbf{X}^* \ \tilde{g}([\mathbf{X}^* \ Z]^T) \ Z]^T) = S^* \frac{\beta}{(\mu + \sigma)} (1 + 2\alpha Z) - (\tau + p\mu + \gamma).$$

Misalkan $A = D_Z h([\mathbf{X}^* \ \tilde{g}([\mathbf{X}^* \ 0]^T) \ 0]^T)$, maka

$$A = S^* \frac{\beta}{(\mu + \sigma)} - (\tau + p\mu + \gamma) \Leftrightarrow A = \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)} - (\tau + p\mu + \gamma).$$

Karena $A = D_z h([\mathbf{X}^* \quad \tilde{g}([\mathbf{X}^* \quad 0]^T) \quad 0]^T)$ dapat dituliskan dalam bentuk $A = K - D$, yaitu:

$$A = K - D = \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)} - (\tau + p\mu + \gamma)$$

diperoleh:

$$K = \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)} \quad \text{dan} \quad D = (\tau + p\mu + \gamma),$$

dengan invers dari D adalah $D^{-1} = \frac{1}{(\tau + p\mu + \gamma)}$.

Dengan demikian, diperoleh: $D^{-1} = \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}$.

Bilangan reproduksi dasar R_0 adalah radius spektral dari KD^{-1} . Jadi, bilangan reproduksi dasar R_0 dari Sistem (1) di atas adalah

$$R_0 = \rho(KD^{-1}) = \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}.$$

Untuk pembahasan selanjutnya mengenai analisis bifurkasi, didefinisikan:

$$R_1 = \frac{2\sqrt{\alpha\mu\beta M[M - \omega\sigma\tau + \mu\sigma(1-p)(\mu + \omega)]}}{\alpha\mu M} - \frac{\beta[M - \omega\sigma\tau + \mu\sigma(1-p)(\mu + \omega)]}{\alpha\mu M},$$

$$R_2 = \frac{\beta[M - \omega\sigma\tau + \mu\sigma(1-p)(\mu + \omega)]}{\alpha\mu M}$$

dengan $M = (\mu + \sigma)(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma) > 0$.

Jelas bahwa $R_1 = 2\sqrt{R_2} - R_2$ dan $R_2 > 0$.

Selanjutnya diberikan lemma sebagai berikut.

Lemma 2 *Diberikan bilangan R_1 dan R_2 seperti yang telah didefinisikan sebelumnya, maka diperoleh kondisi sebagai berikut.*

(i) $R_1 \leq 1$.

(ii) $R_2 \leq 1$ jika dan hanya jika $R_2 \leq R_1$.

4.5 Analisis Bifurkasi

Pada model epidemi, arah bifurkasi menentukan ada atau tidaknya titik ekuilibrium endemik pada saat nilai $R_0 < 1$.

Teorema 3 *Saat $R_0 = 1$, Sistem (1) mengalami bifurkasi mundur untuk $R_2 < 1$ dan bifurkasi maju untuk $R_2 > 1$.*

Bukti:

Untuk menentukan arah bifurkasi, digunakan teorema dan lemma yang dikembangkan oleh Castillo-Chavez dan Song (2004).

Saat $R_0 = 1$ diperoleh:

$$\begin{aligned} R_0 = 1 &\Leftrightarrow \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \beta = \beta' = \frac{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh matriks Jacobian dari \mathbf{f} di \mathbf{P}_0 dengan nilai $\beta = \beta'$ yaitu:

$$Jf([\mathbf{P}_0 \quad \beta']^T) = \begin{bmatrix} -\mu & \omega & 0 & -\frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma} - (1 - p)\mu \\ 0 & -\mu - \omega & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\mu - \sigma & \frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma} \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau - p\mu - \gamma \end{bmatrix}$$

dengan nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\mu - \omega$, dan akar-akar dari:

$$\lambda^2 + (\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)\lambda = 0,$$

yaitu $\lambda_3 = -(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)$ dan $\lambda_4 = 0$. Dengan demikian, matriks $Jf([\mathbf{P}_0 \quad \beta']^T)$ memiliki nilai eigen sederhana 0.

Selanjutnya, dicari vektor eigen kanan yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_4 = 0$, dinotasikan dengan $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4]^T$. Vektor eigen kanan \mathbf{w} memenuhi

$$Jf([\mathbf{P}_0 \quad \beta']^T) \mathbf{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\mu & \omega & 0 & -\frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma} - (1 - p)\mu \\ 0 & -\mu - \omega & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\mu - \sigma & \frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma} \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau - p\mu - \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Dengan demikian diperoleh: $w_4 = \frac{\sigma}{(\tau + p\mu + \gamma)} w_3$.

Dengan mengambil $w_3 = 1$, diperoleh: $w_4 = \frac{\sigma}{(\tau + p\mu + \gamma)}$.

Selanjutnya, juga diperoleh:

$$w_2 = \frac{\tau\sigma}{(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma)} \text{ dan } w_1 = \frac{\omega\tau\sigma - M - (\mu + \omega)(1 - p)\mu\sigma}{\mu(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma)}.$$

Jadi, vektor eigen kanannya adalah

$$\mathbf{w} = \left[\frac{\omega\tau\sigma - M - (\mu + \omega)(1 - p)\mu\sigma}{\mu(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma)} \quad \frac{\tau\sigma}{(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma)} \quad 1 \quad \frac{\sigma}{(\tau + p\mu + \gamma)} \right]^T.$$

Selanjutnya dicari vektor eigen kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_4 = 0$, dinotasikan dengan $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$. Vektor eigen kiri \mathbf{v} memenuhi:

$$\mathbf{v} Jf([\mathbf{P}_0 \quad \beta']^T) = 0$$

$$\Leftrightarrow [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] \begin{bmatrix} -\mu & \omega & 0 & -\frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma} - (1 - p)\mu \\ 0 & -\mu - \omega & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\mu - \sigma & \frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma} \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau - p\mu - \gamma \end{bmatrix} = 0.$$

Dengan demikian diperoleh $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, dan $v_3 = \frac{\sigma}{\mu + \sigma} v_4$.

Selanjutnya dicari \mathbf{v} yang memenuhi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1$, sehingga diperoleh:

$$v_3 = \frac{(\tau + p\mu + \gamma)}{(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)}.$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(\tau + p\mu + \gamma)}{(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)} & \frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu)}{\sigma(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)} \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan kembali bahwa Sistem (1) dapat ditulis menjadi

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

dengan $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [S \ V \ E \ I]^T$ dan $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1-b)A - \beta x_1 x_4 (1 + \alpha x_4) - \mu x_1 + \omega x_2 - (1-p)\mu x_4 := f_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = bA - \mu x_2 - \omega x_2 + \tau x_4 := f_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \beta x_1 x_4 (1 + \alpha x_4) - \mu x_3 - \sigma x_3 := f_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = \sigma x_3 - \tau x_4 - p\mu x_4 - \gamma x_4 := f_4, \end{cases} \quad (3)$$

Turunan parsial tingkat dua dari f_k untuk $k = 1, 2, 3, 4$ di \mathbf{P}_0 yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_4}(\mathbf{P}_0) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4 \partial x_1}(\mathbf{P}_0) = -\beta, & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial \beta}(\mathbf{P}_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4^2}(\mathbf{P}_0) &= \frac{-2\alpha\beta A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)}, & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4 \partial \beta}(\mathbf{P}_0) &= -\frac{A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)}, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_4}(\mathbf{P}_0) &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_4 \partial x_1}(\mathbf{P}_0) = \beta, & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial \beta}(\mathbf{P}_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_4^2}(\mathbf{P}_0) &= \frac{2\alpha\beta A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)}, & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_4 \partial \beta}(\mathbf{P}_0) &= \frac{A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)}. \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh koefisien c dan d , yaitu

$$\begin{aligned} c &= \sum_{k,i,j=1}^4 v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} ([\mathbf{P}_0 \ \beta']^T) \\ &= \frac{2\beta\sigma[\omega\tau\sigma - M - (\mu + \omega)(1-p)\mu\sigma + \sigma\alpha A(\mu(1-b) + \omega)]}{\mu(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma)(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)} \end{aligned}$$

dan

$$d = \sum_{k,i=1}^4 v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta} ([\mathbf{P}_0 \ \beta']^T) = \frac{\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)} > 0.$$

Jika $\alpha = \alpha' = \frac{M - \omega\tau\sigma + \sigma\mu(1-p)(\mu + \omega)}{\sigma A(\mu(1-b) + \omega)}$, maka $c = 0$. Jika $\alpha < \alpha'$, maka $c < 0$ dan sebaliknya, $\alpha > \alpha'$, maka $c > 0$. Selanjutnya, karena diketahui

$$R_2 = \frac{\beta[M - \omega\tau\sigma + \mu\sigma(1-p)(\mu + \omega)]}{\alpha\mu M} \Leftrightarrow R_2 \alpha \mu M \beta [\alpha' \sigma A(\mu(1-b) + \omega)]$$

dan pada saat kondisi $R_0 = 1$, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega]}{\mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega] &= \mu(\mu + \omega)(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \beta\sigma A[\mu(1-b) + \omega] = \mu M,$$

diperoleh

$$R_2\alpha\mu M = \beta[\alpha'\sigma A(\mu(1-b) + \omega)] \Leftrightarrow R_2\alpha\mu M = \alpha'\mu M \Leftrightarrow R_2\alpha = \alpha'.$$

Dengan demikian, jika $\alpha > \alpha'$, maka $c > 0$ ekuivalen dengan pernyataan jika $R_2 < 1$ maka $c > 0$. Sebaliknya jika $\alpha < \alpha'$, maka $c < 0$ ekuivalen dengan jika $R_2 > 1$, maka $c < 0$. Jadi, saat $R_0 = 1$ terjadi bifurkasi mundur jika $R_2 < 1$ dan bifurkasi maju jika $R_2 > 1$.

Dengan kata lain, jika $R_0 = 1$ dan $R_2 > 1$, maka tidak ada titik ekuilibrium endemik pada saat $R_0 < 1$. Sebaliknya, jika $R_0 = 1$ dan $R_2 < 1$, maka terdapat lebih dari 1 titik ekuilibrium endemik meskipun nilai $R_0 < 1$ (Castilo-Chavez dan Song, 2004). Selain itu, diperhatikan bahwa dengan mencari turunan parsial dari koefisien bifurkasi c terhadap b , diperoleh

$$\frac{\partial c}{\partial b} = -\frac{2\alpha\beta\mu\sigma^2 A}{\mu(\mu + \omega)(\tau + p\mu + \gamma)(\mu + \sigma + \tau + p\mu + \gamma)} < 0.$$

Jadi, koefisien bifurkasi c adalah fungsi turun terhadap b .

4.6 Eksistensi Titik Ekuilibrium Endemik

Berikut diberikan teorema yang menunjukkan pengaruh nilai R_0 , R_1 dan R_2 terhadap eksistensi titik ekuilibrium endemik Sistem (1).

Teorema 4

1. Saat $R_2 < 1$. Sistem (1) tidak memiliki titik ekuilibrium endemik untuk $R_0 < R_1$, memiliki 2 titik ekuilibrium endemik untuk $R_1 < R_0 < 1$ dan 1 titik ekuilibrium endemik untuk $R_1 = R_0 < 1$ dan $R_0 \geq 1$.
2. Saat $R_2 > 1$. Sistem (1) tidak memiliki titik ekuilibrium endemik untuk $R_0 \leq 1$ dan memiliki 1 titik ekuilibrium endemik untuk $R_0 > 1$.

Bukti:

Dimisalkan $\mathbf{P}^* = [S^* \ V^* \ E^* \ I^*]^T$ titik ekuilibrium endemik Sistem (1).

Titik ekuilibrium endemik Sistem (1) adalah

$$\mathbf{P}^* = \left[\frac{(\mu + \sigma)(\tau + p\mu + \gamma)}{\sigma\beta(1 + \alpha I^*)} \quad \frac{bA + \tau I^*}{\mu + \omega} \quad \frac{(\tau + p\mu + \gamma)I^*}{\sigma} \quad I^* \right]^T,$$

dengan I^* yang merupakan akar-akar positif dari persamaan

$$(1 - b)A - \beta S^* I^* (1 + \alpha I^*) - \mu S^* + \omega V^* - (1 - p)\mu I^* = 0.$$

Jelas bahwa S^* , V^* dan E^* positif untuk I^* positif.

Diperhatikan bahwa

$$(1 - b)A - \beta S^* I^* (1 + \alpha I^*) - \mu S^* + \omega V^* - (1 - p)\mu I^* = 0$$

dapat ditulis menjadi

$$a_1 I^{*2} + a_2 I^* + a_3 = 0, \tag{4}$$

dengan:

$$a_1 = \alpha\beta(\omega\sigma\tau - M) - \mu\sigma\alpha\beta(1 - p)(\mu + \omega),$$

$$a_2 = M(\mu\alpha R_0 - \beta) + \omega\sigma\beta\tau - \mu\sigma\beta(1 - p)(\mu + \omega),$$

$$a_3 = \mu M(R_0 - 1).$$

Selanjutnya, diperoleh:

(i) $a_1 < 0$,

(ii) $a_2 > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > R_2$,

(iii) $a_3 > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$,

(iv) $a_2^2 - 4a_1 a_3 \geq 0$ jika dan hanya jika $R_0 \geq R_1$,

Oleh karena (i) terpenuhi, maka menurut aturan tanda Descartes, Persamaan (4) memiliki 1 akar positif jika $a_3 > 0$. Selanjutnya karena juga diketahui (iii), maka Sistem (1) memiliki 1 titik ekuilibrium endemik saat $R_0 > 1$.

5. KESIMPULAN

Model yang dibentuk menunjukkan adanya kemungkinan terjadi bifurkasi mundur yang ditandai dengan munculnya dua titik ekuilibrium endemik saat nilai R_0 kurang dari 1. Jika bifurkasi mundur terjadi, penyakit tetap ada di dalam populasi meskipun nilai R_0 kurang dari 1. Diperlukan menurunkan nilai R_0 di bawah nilai R_1 agar penyakit akan menghilang dari populasi. Sebaliknya jika bifurkasi maju terjadi, menurunkan nilai R_0 agar kurang dari 1 dapat menghilangkan penyakit. Adapun nilai R_0 dapat diturunkan dengan berbagai cara sebagai berikut.

1. meningkatkan laju penanganan/ pengobatan terhadap individu yang terinfeksi dan memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit,
2. meningkatkan proporsi rekrutmen yang diberikan vaksin,
3. mengurangi jumlah rekrutmen yang masuk ke dalam populasi, dan
4. mengurangi laju kontak antara individu yang rentan penyakit dengan individu yang terinfeksi dan memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit yang dapat mengakibatkan penularan penyakit. Misalnya dengan menghindari aktivitas atau interaksi yang berisiko memicu terjadinya penularan penyakit.

Selain itu, karena koefisien bifurkasi c adalah fungsi turun terhadap b , maka meningkatkan nilai b atau proporsi rekrutmen yang diberikan vaksin juga dapat menurunkan kemungkinan terjadinya bifurkasi mundur sehingga dapat meringankan upaya pengendalian penularan penyakit di dalam populasi.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Castillo-Chavez, C. dan Song, B., 2004, Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 1, 2, 361 – 404.
- [2]. Castillo-Chavez, C., Feng, Z., Huang W., 2001, On the Computation of R_0 and its Role on Global Stability, <http://math.la.asu.edu/~chavez/CCCPUB/>, diakses pada tanggal 26 Nopember 2012.
- [3]. Diekmann, O. dan Heesterbeek, J.A.P., 2000, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, New York.
- [4]. Gunawan, 2014, Analisis Kestabilan Lokal dan Bifurkasi pada Model Epidemi SEIV dengan Vaksinasi dan Penularan Penyakit secara Vertikal, *Tesis tidak diterbitkan*, Yogyakarta: Pascasarjana Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada.
- [5]. Gunawan, 2015, Analisis Bifurkasi pada Model Epidemi SEIV dengan Laju Insidensi Nonlinear pada Penyakit Mematikan yang Menular secara Horizontal dan Vertikal, *Laporan Penelitian tidak dipublikasikan*, Banjarmasin: STKIP PGRI Banjarmasin.
- [6]. Hethcote, H.W., 2000, The Mathematics of Infectious Diseases, *SIAM Review*, 42, 4, 599 – 653.
- [7]. Kuznetsov, Y.A., 1998, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.

- [8]. Li, L., Sun, G., Jin, Z., 2010, Bifurcation and Chaos in an Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rates, *Applied Mathematics and Computation*, 216, 1226 - 1234
- [9]. Long, D. dan Xiang, Z., 2011, On the study of an SEIV epidemic model concerning vaccination and vertical transmission, *Journal of Applied Mathematics & Bioinformatics*, 1, 1, 21 – 30.
- [10]. Luenberger, D.G., 1979, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- [11]. Perko, L., 2001, *Differential Equations and Dynamical System, Third Edition*, Springer-Verlag, New York.
- [12]. Van den Driessche, P. dan Watmough, J., 2000, A Simple SIS Epidemic Model with a Backward Bifurcation. *J. Math. Biol.* 40, 525–540.
- [13]. Wiggins, S., 2003, *Introduction of Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos Second Edition*, Springer-Verlag, New York.
- [14]. Yayasan Spiritia, 2013, Profilaksis Pascapajanan, <http://www.spiritia.or.id/li/bacali.php?lino=156>, diakses pada tanggal 30 Desember 2013.