Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.16 No.1 (Juni 2022) Hal. 28-39

PELUANG TRANSISI PADA PENENTUAN PREMI TUNGGAL BERSIH ASURANSI JIWA BERJANGKA

Muhammad Meidy Maulana[1], Dewi Sri Susanti[2], Aprida Siska[3] Lestia[*]

[1,3]Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
[2]Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
[*]Email: as_lestia@ulm.ac.id

ABSTRACT

A life insurance contract contains the amount of funds that must be paid by insured as a responsibility for a received compensation. There funds are called as premium. Payment of the premium which paid with one payment at the beginning of the contract time called as net single premium. One factor that influenced the calculation of life insurance premiums is a life probability. In general, a life probability constructed by the assumption that death only involves two conditions, life and death. Yet, there are another condition for the insured that also affect a person's death condition which is sick. The objecktive of this research is to determine net single premium of term life insurance formula using transition probability as a life probability. The first will constructed transition from three condition which are health, sick, and death as stochastic process. Transition probability will be determined by solving Chapman Kolmogorov systemdifferential equation. Then the probability transition that determined will be used for calculate netsingle premium from term life insurance. Net single premium will be determined by using expectation value of present value of benefit random variables. From this research get formula of net single premium of term life insurance contains discount function, transition probability, and force of mortality of someone.

Keywords: Insurance, Premium, Stochastic, Chapman-Kolmogorov, Transition Probability

ABSTRAK

Suatu kontrak asuransi jiwa, memuat besaran dana yang harus dibayarkan oleh nasabah sebagai suatu kewajiban atas santunan yang diperoleh. Dana tersebut biasanya dinyatakan sebagai premi. Salah satu faktor yang mempengaruhi perhitungan premi asuransi jiwa adalah peluang hidup seseorang. Pada umumnya peluang hidup seseorang dibangun dengan asumsi bahwa kematian hanya melibatkan dua kondisi, yaitu hidup dan meninggal. Tetapi terdapat kondisi lain pada nasabah yang juga berpengaruh terhadap kematian seseorang yaitu kondisi sakit. Penelitian ini bertujuan menentukan formula premi tunggal bersih asuransi jiwa berjangka dengan peluang transisi sebagai peluang hidup seseorang. Pertama akan dibangun transisi dari tiga kondisi yaitu sehat, sakit, dan meninggal sebagai suatu proses stokastik. Peluang transisi ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan diferensial Chapman-Kolmogorov dan kemudian akan digunakan untuk menentukan formula dari premi tunggal bersih dari asuransi jiwa berjangka. Premi tunggal bersih ditentukan dengan menghitung nilai ekspektasi dari variabel acak nilai tunai manfaat kematian. Dari penelitian ini diperoleh formula premi tunggal bersih dari asuransi jiwa berjangka yang memuat fungsi diskon, peluang transisi, dan laju kematian seseorang.

Kata Kunci: Asuransi, Premi, Stokastik, Chapman-Kolmogorov, Peluang Transisi.

Received: 5 April 2022 Accepted: 29 Mei 2022 Published: 17 Juni 2022

PENDAHULUAN

Asuransi jiwa merupakan produk asuransi yang memberikan manfaat (*benefit*) pengalihan risiko atas kehilangan nilai ekonomis hidup seseorang yang di dalamnya terdapat sebuah kontrak yang disebut sebagai polis asuransi (Rakhman & Effendie, 2013). Dalam sebuah polis juga disertakan sejumlah biaya yang harus dibayarkan oleh pemegang polis sebagai suatu kewajiban agar memperoleh santunan ketika terjadi kematian yang disebut dengan premi. Penentuan besarnya premi yang harus dibayarkan pada asuransi jiwa dipengaruhi oleh beberapa faktor, di antaranya peluang hidup seseorang dan tingkat bunga.

Jones, (1993)menyebutkan pada umumnya penentuan peluang hidup seseorang dalam perhitungan premi diasumsikan pada dua kondisi yaitu hidup dan meninggal, tetapi selain dua kondisi tersebut terdapat kondisi lain pada nasabah yang dapat menyebabkan nasabah itu meninggal, yaitu kondisi sakit. Kondisi fisik seseorang yang dapat berubah-ubah dari satu kondisi ke kondisi yang lain, dari waktu ke waktu. Proses perpindahan ini dapat dipandang sebagai sebuah proses stokastik.

Setiap perubahan dari satu kondisi ke kondisi lainnya itu memiliki nilai peluang yang berbeda. Peluang perubahan kondisi ini disebut dengan peluang transisi. Penentuan peluang transisi ini mengikuti suatu proses Markov. Pada penelitian ini akan dikaji mengenai penentuan peluang transisi untuk digunakan dalam perhitungan nilai aktuaria pada proses *multi-state* seperti yang telah dikaji dalam Jones, (1994). Peluang transisi ini akan digunakan dalam menentukan premi tunggal bersih dari asuransi jiwa berjangka sebagai peluang bertahan hidup seseorang.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Proses Markov

Suatu proses Markov adalah suatu proses stokastik dengan sifat khususjika peluang keadaan dimasa yang akan datang dari suatu proses, ketika keadaan saat ini diketahui, maka peluang keadaan dari proses waktu yang akan datang tidak dipengaruhi oleh keadaan masa lalu. Rantai Markov waktu kontinu merupakan proses Markov yang ruang waktunya kontinu dan ruang *state*-nya bersifat diskrit. Jika $P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$ tidak bergantung terhadap s maka proses dikatakan memiliki peluang transisi yang stasioner atau homogen. Sehingga peluang transisi yang stasioner dapat dinyatakan sebagai

$$P_{ij}(t)=P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$$

(1) Peluang transisi untuk proses Markov waktu kontinu dapat dinyatakan dalam bentuk matriks peluang transisi sebagai berikut

$$P(t) = \begin{array}{cc} & \text{State j} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & n \end{array} \\ \text{State i} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} P_{11}(t) & \cdots & P_{13}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(t) & \cdots & P_{nn}(t) \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

Proses Markov waktu kontinu dengan ruang state diskrit dalam Karlin & Taylor, (1998), memiliki sifat-sifat dari peluang transisi yaitu:

a) $0 \leq P_{ij}(t) \leq 1$ (3)

b) $\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t) = 1; i, j = 1,2, \dots, n$ (4)

c) $\lim_{t \to 0} P_{ij}(t) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ (5)

Teorema 1 (Ross, 1996)
Jika X adalah rantai Markov dengan ruang state diskrit dan ruang waktu kontinu, dengan peluang transisi $P_{ij}(t)$, maka persamaan Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}\,(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t).\, P_{kj}(s) \qquad (6)$$

untuk setiap $s, t \geq 0$.

Teorema 2 (Ross, 1996)
Jika X adalah rantai Markov dengan ruang state diskrit dan ruang waktu kontinu, dengan peluang transisi $P_{ij}(t)$, maka berlaku Persamaan Diferensial Chapman-Kolmogorov yaitu

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)\mu_{kj}(s) - \mu_j(t) P_{ij}(s\,) \qquad (7)$$

untuk setiap $t, u \geq 0$.

Penentuang peluang transisi mempertimbangka usia seseorang. Perhitungan premi pada asuransi mempertimbangkan semua kemungkinan sisa usia seseorang dapat dinyatakan sebagai suatu variabel acak sisa usia seseorang yang disimbolkan sebagai $T(y)$. Jika notasi (y) menyatakan seseorang berusia y tahun dan meninggal pada usia Y maka $Y - y$ menyatakan waktu hidup yang tersisa dari (y). Fungsi distribusi kumulatif dari $T(y)$ adalah sebagai berikut

$$F_{T(y)}(t) = 1 - \frac{s(y+t)}{s(y)} = {}_{t}q_{y} \qquad (8)$$

dengan ${}_{t}q_{y}$ menyatakan peluang seseorang berusia y akan meninggal dalam jangka waktu t dan $s(y)$ adalah fungsi survival. Sedangkan fungsi peluang seseorang berusia y akan hidup hingga usia t dinyatakan sebagai

$${}_{t}p_{y} = 1 - {}_{t}q_{y} \qquad (9)$$

Laju kematian (*force of mortality*) digunakan dalam perhitungan asuransi jiwa dinyatakan sebagai berikut

$$\mu(y) = -\frac{s'(y)}{s(y)} \qquad (10)$$

Fungsi $f_{T(y)}(t)$ menyatakan fungsi kepadatan peluang dari $T(y)$, berlaku

$$f_{T(y)}(t) = {}_{t}p_{y}\, \mu(y+t) \qquad (11)$$

(Bowers et al., 1997).

2. Asuransi Jiwa Berjangka

Pembayaran santunan dilakukan hanya jika nasabah meninggal dalam waktu n -tahun masa pertanggungan. Jika sebuah unit pembayaran saat orang berusia y tahun mengalami kematian, maka didefinisikan beberapa variabel acak berikut

$$b_t = \begin{cases} 1\,; t \leq n \\ 0; t > n \end{cases} \tag{12}$$

dengan b_t adalah fungsi manfaat (*benefit*). Berikutnya variabel acak v_t yang merupakan fungsi diskon dengan laju tingkat bunga kontinu yaitu

$$v_t = v^t; t \geq 0 \tag{13}$$

Kemudian variabel acak nilai tunai dari manfaat kematian yang didefinisikan sebagai berikut

$$Z = b_T v_T \begin{cases} v^T; T \leq n \\ 0; T > n \end{cases}. \tag{14}$$

Nilai ekspektasi dari nilai sekarang variabel acak nilai tunai atau Z disebut *net single premium (NSP)*, dinotasikan $\bar{A}^1_{y:\overline{n}|}$ dengan Z adalah fungsi dari T .

$$\bar{A}^1_{y:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \;\; {}_tp_y \mu(y+t)dt \tag{15}$$

(Bowers et al., 1997).

METODE PENELITIAN

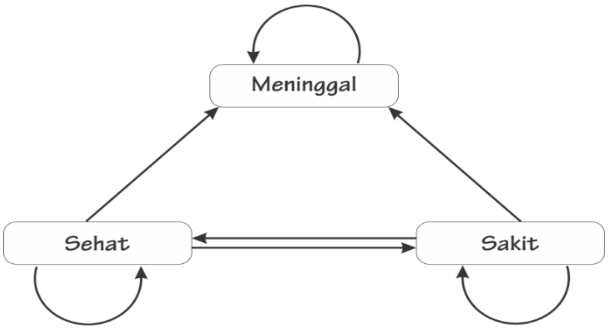
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature dengantahapan sebagai berikut:

1) Menentukan terbentuknya peluang transisi dari 3 buah *state* dengan tahapan:
   a. Menjelaskan transisi dari satu *state* ke *state* lain dipandang sebagai suatu proses Markov,
   b. Menentukan peluang transisi dengan menyelesaikan sistem persamaan differensial Chapman-Kolmogorov
2) Menggunakan peluang transisi untuk menentukan premi tunggal bersih dari asuransi jiwa berjangka dengan tahapan:
   a. Mendefinisikan variabel acak nilai tunai manfaat kematian.
   b. Menentukan fungsi kepadatan peluang dari variabel acak.
   c. Menghitung nilai ekspektasi dari variabel acak nilai tunai manfaat kematian sebagai perhitungan nilai premi tunggal bersih dari asuransi jiwa berjangka.
3) Mengaplikasikan rangkaian perhitungan ke dalam contoh soal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model-model asuransi jiwa pada umumnya dibangun dengan asumsi bahwa kematian hanya melibatkan dua kondisi, yaitu hidup dan meninggal. Pada penelitian ini pemodelan kasus asuransi jiwa akan dilakukan dengan melibatkan tiga kondisi yang mungkin mempengaruhi peluang hidup seseorang yaitu sehat, sakit, dan meninggal. Proses stokastik merupakan metode dalam statistika untuk menggambarkan perubahan atau transisi kondisi suatu objek dari waktu ke waktu. Jika yang diamati adalah kondisi seseorang sampai terjadi kematian, maka perubahan kondisi yang terjadi adalah sehat, sakit, atau meninggal.

1. Proses Stokastik untuk Menggambarkan Kondisi Fisik Seseorang



Gambar 1. Diagram Peluang Transisi Kondisi Fisik

Pada suatu waktu kondisi fisik seseorang dapat berubah secara acak dari waktu ke waktu. Hal ini dapat di gambarkan sebagai suatu proses stokastik, dengan ruang waktu kontinu dan ruang keadaan bersifat diskrit. Elemen ruang keadaan dari proses ini adalah kondisi fisik seseorang yaitu sehat, sakit, dan meninggal. Pada suatu proses stokastik terdapat suatu peluang transisi, yaitu peluang perubahan dari satu kondisi ke kondisi yang lain. Transisi kondisi ke kondisi yang lain pada selang waktu sebarang digambarkan pada Gambar 1. Dengan menggunakan asumsi rantai Markov waktu kontinu homogen yang menyatakan saat $P(X(t + \Delta t) = j | X(t) = i)$ tidak bergantung waktu t atau dapat dikatakan bahwa peluang transisi bersifat homogen atau stasioner, sehingga $P(X(t + \Delta t) = j | X(t) = i)$ dapat ditulis sebagai

$$P_{ij}(\Delta t) = \mathrm{P}(X(t + \Delta t) = j | X(t) = i) \quad (16)$$

Pada kasus kali ini dengan tiga kondisi fisik seseorang yang diberikan label *state* {1:Sehat, 2:Sakit, 3:Meninggal}. Peluang transisi pada Persamaan (16) dapat disusun dalam bentuk matriks yang disebut sebagai matriks peluang transisisebagai berikut

$$\boldsymbol{P}(\Delta \boldsymbol{t}) = \begin{array}{c c} & \textit{State } j \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \textit{State } i \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} P_{11}(\Delta t) & P_{12}(\Delta t) & P_{13}(\Delta t) \\ P_{21}(\Delta t) & P_{22}(\Delta t) & P_{23}(\Delta t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (17)$$

2. Menentukan Peluang Transisi dari Sistem Persamaan Diferensial Chapman-Kolmogorov

Penentuan peluang transisi lainnya pada persamaan (18) dapat ditentukan dengan mencari solusi sistem persamaan diferensial Chapman-Kolmogorov. Persamaan Chapman-Kolmogorov berdasarkan Persamaan (2) pada Teorema 1

$$P_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{3} P_{ik}(t)P_{kj}(\Delta t) \tag{18}$$

dengan $t, \Delta t > 0$. Persamaan (18) dapat ditulis sebagai elemen dari hasil perkalian matriks berikut

$$P(t+\Delta t) = P(t)P(\Delta t) \tag{19}$$

Karena $P(t)$ merupakan matriks peluang transisi dari proses markov waktu kontinu, berdasarkan sifat Markov waktu kontinu pada persamaan (5), maka berlaku

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I}$$

Jika Persamaan (19) ditarik nilai limitnya untuk nilai t menuju 0, maka

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(t+\Delta t) = \lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(\Delta t) \tag{20}$$

Selanjutnya, dengan memodifikasi persamaan (19) menjadi

$$P(t+\Delta t - t) = P(t)P(\Delta t - t) \tag{21}$$

Kemudian Persaaman (21) akan ditarik nilai limitnya nilai t menuju 0

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(\Delta t) = \lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(\Delta t - t) \tag{22}$$

Sehingga dari persamaan (20) dan (22) menyatakan bahwa

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(t+\Delta t) = \lim_{t \to 0} \boldsymbol{P}(\Delta t - t) = \boldsymbol{P}(\Delta t)$$

yang berarti $\boldsymbol{P}(\Delta t)$ kontinu untuk $\Delta t > 0$. Karena $\boldsymbol{P}(\Delta t)$ kontinu, maka $P_{ij}(\Delta t)$ dapat diturunkan pada saat $\Delta t = 0$, yaitu:Persamaan (23) dan (24) disebut dengan laju transisi. Hubungan untuk kedua laju transisi dapat dilihat melalui sifat peluang transisi berdasarkan P ersamaan (4) yaitu

$$\mu_{ii}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t}; i = j \tag{23}$$

$$\mu_{ij}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad ; i \neq j \tag{24}$$

Selanjutnya,

$$\sum_{j=1}^{3} P_{ij}(\Delta t) = 1 \ ; i = 1,2,3$$

$$1 - P_{ii}(\Delta t) = \sum_{j=1; j\neq i}^{3} P_{ij}(\Delta t)$$

$$-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \sum_{j=1; j\neq i}^{3} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

Jika dituliskan maka

$$\mu_{ii}(\Delta t) = -\sum_{j=1;j\neq i}^{3} \mu_{ij}(\Delta t).$$

$$\mu_i(\Delta t) = \sum_{j=1;j\neq i}^{3} \mu_{ij}(\Delta t)$$

$$\mu_{ii}(\Delta t) = -\mu_i(\Delta t) \tag{25}$$

Persamaan (25) disebut total laju transisi untuk semua *state* i adalah total seluruh entri i pada suatu baris untuk $i \neq j$. Kemudian dengan persamaan diferensial Chapman-Kolmogorov pada Teorema 2 akan ditentukan solusinya sebagai peluang transisi kondisi fisik seseorang yaitu sebagai berikut

$$\frac{dP_{ij}(\Delta t)}{d\Delta t} = \sum_{k\neq j} P_{ik}(\Delta t)\mu_{kj}(t) - P_{ij}(\Delta t)\mu_j(t)$$

Sistem persamaan diferensial Chapman-Kolmogorov dari tiga buah kondisi fisik dapat dituliskan kedalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d\boldsymbol{P}(\Delta t)}{d\Delta t} = \boldsymbol{P}(\Delta t)\boldsymbol{\mu}(t) \tag{26}$$

dengan $\boldsymbol{P}(\Delta t)$ merupakan matriks peluang transisi dan $\mu(t)$adalah matriks laju transisi. Dikarenakan $\boldsymbol{P}(\Delta t)$ kontinu dan berdasarkan sifat dari peluang transisi pada Persamaan (5), sehingga $\boldsymbol{P}(0) = I$ dapat dinyatakan sebagai nilai awal dari sistem persamaan diferensial pada Persamaan (26). Sistem persamaan diferensial pada Persamaan (26), memiliki solusi

$$\boldsymbol{P}(\Delta t) = e^{\boldsymbol{\mu}(t)\Delta t}\boldsymbol{P}(0) = e^{\boldsymbol{\mu}(t)\Delta t}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t})]^k \, \Delta t^k}{k!} \tag{27}$$

matriks $[\boldsymbol{\mu}(t)]^k$ didiagonalisasi atau dibentuk menjadi bentuk Matriks Kanonik Jordan.

Untuk mencari matriks diagonal dan matriks Kanonik Jordan dari matriks $\mu(t)$ dengan menggunakan nilai eigen dari matriks $\mu(t)$. Ketika semua nilai eigen dari matriks $\mu(t)$ bernilai berbeda atau memiliki tiga vektor eigen yang bebas linear, maka menurut Anton & Rorres (2014) matriks dapat didiagonalisasi yaitu

$$\mu(t) = \mathbf{W}\boldsymbol{M}\mathbf{W}^{-1} \tag{28}$$

dengan M adalah matriks diagonal yang elemen diagonalnya adalah nilai eigen dari matriks $\mu(t)$ seperti yang disajikan dalam Salman & Borkar (2016), yaitu

$$\boldsymbol{M} = e^{\boldsymbol{M}\Delta t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 \Delta t} \end{bmatrix}$$

dan W adalah matriks vektor eigen dari $\mu(t)$. Persamaan (28) dapat disubstitusi ke Persamaan (27) sehingga

$$\boldsymbol{P}(\Delta \boldsymbol{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^k\boldsymbol{W}^{-1} \, \Delta t^k}{k!}.$$
$$= \boldsymbol{W}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{M}^k \, \Delta t^k}{k!}\right)\boldsymbol{W}^{-1}$$

$$= \boldsymbol{W}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\boldsymbol{M}\,\Delta t]^k}{k!}\right)\boldsymbol{W^{-1}} \tag{29}$$

sehingga formula untuk masing-masing elemen pada matriks peluang transisi dengan mendiagonalkan matriks $\mu(t)$ adalah

$$P_{ij}(\Delta t) = \sum_{k=1}^{3} w_{ik} e^{\lambda_k \Delta t}\, r_{kj} \tag{30}$$

untuk setiap $i, j = 1,2,3$, dengan λ_k adalah nilai eigen ke-k, w_{ik} adalah elemen dari matriks W dan r_{kj} adalah elemen dari matriks $\boldsymbol{W^{-1}}$.

Kasus selanjutnya, ketika nilai eigen dari matriks laju transisi akan bernilai sama atau tidak terdapat tiga vektor eigen yang bebas linear, sehingga matriks laju transisi dapat dibentuk menjadi matriks kanonik Jordan seperti yang disajikan pada Horn & Johnson (2013). Sehingga matriks laju transisi dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\mu(t) = SKS^{-1} \tag{31}$$

dengan K adalah matriks Kanonik Jordan dari matriks $\mu(t)$ dan S adalah matriks vektor eigen tergeneralisasi dari $\mu(t)$ (Hogben, 2007). Persamaan (31) dapat disubstitusi ke Persamaan (27) sehingga

$$\boldsymbol{P}(\Delta t) = \boldsymbol{S}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{K}^k\,\Delta t^k}{k}\right)\boldsymbol{S^{-1}} = \boldsymbol{S}(e^{\boldsymbol{K}\Delta t})\boldsymbol{S^{-1}} \tag{32}$$

sehingga formula untuk masing-masing elemen pada matriks peluang transisi dengan membentuk matriks kanonik Jordan dari $\mu(t)$ adalah

$$P_{ij}(\Delta t) = \sum_{k=1}^{3} s_{ik} e^{\lambda_k \Delta t} c_{kj} + s_{i2}\Delta t e^{\lambda_2 \Delta t} c_{3j} \tag{33}$$

untuk setiap $i, j = 1,2,3$, dengan λ_k adalah nilai eigen ke-k, s_{ik} adalah elemen dari matriks S dan c_{kj} adalah elemen dari matriks S^{-1}.

a. Menentukan Formula Premi Tunggal Bersih Asuransi JiwaBerjangka

Penelitian ini akan menentukan premi tunggal bersih asuransi jiwa berjangka dengan model asuransi yang kontinu. Dalam penentuan premi tunggal bersih ini akan ada beberapa asumsi yang dibuat, yaitu

a) Nilai manfaat kematian atau santunan dibayarkan ketika seorang pemegang polis atau nasabah meninggal dalam jangka waktu kontrak asuransi.
b) Laju tingkat suku bunga kontinu diasumsikan konstan.

Pertanggungan pada asuransi jiwa berjangka n-tahun hanya akan diberikanselama n-tahun jangka waktu kontrak asuransi, yaitu

$$b_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & ; t \leq n \; dan \; j = 3 \\ 0 & ; t > n \; atau \; j \neq 3 \end{cases} \tag{34}$$

Selanjutnya, Karena perhitungan premi tunggal bersih dilakukan saat polis disepakati atau saat waktu $t = 0$ artinya akan terdapat perbedaan nilai uang dari manfaat yang diakibatkan oleh adanya tingkat suku bunga. Sehingga dapat didefinisikan suatu fungsi diskon, yaitu

$$v_t = \begin{cases} v^T & ; T \leq n \; dan \; j = 3 \\ 0 & ; T > n \; atau \; j \neq 3 \end{cases} \tag{35}$$

Dengan demikian, dapat dikonstruksi suatu fungsi yang menyatakan nilai tunai dari seluruh kemungkinan manfaat yang akan dibayarkan di masa yang akan datang untuk para tertanggung menggunakan Persamaan (34) dan (35), yaitu

$$Z_{ij}(T) = b_{ij}(T)v_T = \begin{cases} v^T & ; T \leq n \; dan \; j = 3 \\ 0 & ; T > n \; atau \; j \neq 3 \end{cases} \tag{36}$$

dengan Z_{ij} merupakan fungsi dalam $T = T(y)$. Fungsi kepadatan peluang dari $T(y)$ berdasarkan peluang transisi menjadi

$$f_{T(y)}(t) = \left(1 - P_{i3}(t)\right) \mu(y+t)$$

Premi dari asuransi jiwa berjangka n -tahun dapat ditentukan dari ekspektasi variabel acak nilai tunai santunan, sebagai berikut

$$\bar{A}^{1}_{y:\overline{n}|i3} = E\left[Z_{ij}(T)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z_{ij}(t)\, f_{T(y)}(t)dt$$

Dengan Saat perhitungan bunga didasarkan pada tingkat bunga majemuk, sehingga laju tingkat bunga akan bernilai konstan atau $\delta_t = \delta$. Sehingga

$$\bar{A}^{1}_{y:\overline{n}|i3} = \int_{0}^{n} e^{-\delta t} \left(1 - P_{i3}(t)\right)\mu_{i3}(y+t)dt$$

$$\bar{A}^{1}_{y:\overline{n}|i3} = \int_{0}^{n} e^{-\delta t} \left(1 - \left(\sum_{k=1}^{3} s_{ik} e^{\lambda_k \Delta t} c_{kj} + s_{i2}\Delta t e^{\lambda_2 \Delta t} c_{3j}\right)\right) \mu_{i3}(y+t)dt \tag{37}$$

Pada formula premi tunggal bersih dari asuransi jiwa berjangka memuat $P_{i3}(t)$ yang bergantung pada nilai eigen matriks laju transisi.

b. Contoh Soal

Contoh yang akan dibahas dalam penelitian kali ini adalah seorang pegawai swasta berusia 50 tahun bernama Restu yang membeli polis asuransi jiwaberjangka. Jangka waktu kontrak asuransi selama 5 tahun dengan pembayaran premi direncanakan akan dibayarkan dalam satu kali pembayaran pada awal waktu diterbitkannya polis asuransi. Berdasarkan perjanjian dalam polis, pihak perusahaan asuransi akan membayarkan santunan sebagai pertanggungan jika terjadi klaim atau nasabah meninggal dunia. Uang santunan yang akan dibayarkan adalah sebesar Rp. 20.000.000,00. dengan bunga pembayaran premi sebesar 5%. Pada contoh ini akan ditentukan besar premi tunggal bersih saat dia mendaftarkan diri di asuransi pada kondisi sehat dan sakit.

Perhitungan peluang transisi akan menggunakan data laju transisi pada Tabel 1 yaitu tabel data laju transisi yang dipublikasi oleh Jones (1994) untuk usia 45 sampai 70 tahun. Pada tabel 1 simbol $\mu_{ij}^{(y)}$ menyatakan laju transisi dari kondisi i pada usia (y) tahun ke kondisi j pada usia $(y+1)$.

Tabel 1. Laju Transisi Kondisi Fisik Usia 45-70 Tahun

(y)	$\mu_{12}^{(y)}$	$\mu_{13}^{(y)}$	$\mu_{23}^{(y)}$	(y)	$\mu_{12}^{(y)}$	$\mu_{13}^{(y)}$	$\mu_{23}^{(y)}$
45	0,164	0,00097	0,00225	58	0,165	0,00304	0,00933
46	0,164	0,00107	0,00251	59	0,165	0,00329	0,01036

47	0,163	0,00117	0,0028	60	0,167	0,00352	0,0115
48	0,163	0,00128	0,00313	61	0,167	0,0038	0,01274
49	0,163	0,0014	0,0035	62	0,167	0,0041	0,01411
50	0,163	0,00154	0,00391	63	0,167	0,00442	0,0156
51	0,163	0,00168	0,00437	64	0,168	0,00472	0,01725
52	0,164	0,00183	0,00488	65	0,169	0,00503	0,01905
53	0,164	0,00201	0,00544	66	0,169	0,0054	0,02102
54	0,164	0,00218	0,00608	67	0,17	0,00574	0,02318
55	0,164	0,00238	0,00677	68	0,171	0,00609	0,02553
56	0,164	0,00259	0,00755	69	0,173	0,00638	0,02811
57	0,164	0,00282	0,0084	70	0,174	0,00674	0,03093

Kemudian berdasarkan laju transisi $\mu_{ij}^{(y)}$ tabel 1 akan digunakan untuk menghitung nilai peluang berdasarkan formula pada Persamaan (30). Untuk menghitung nilai peluang transisi dengan membangun matriks $\boldsymbol{W}^{(\boldsymbol{y})}$, $\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{y})}$, dan $(\boldsymbol{W}^{-\boldsymbol{1}})^{(\boldsymbol{y})}$. Sehingga matriks peluang transisinya dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\boldsymbol{P}^{(\boldsymbol{y})}(t) = \boldsymbol{W}^{(\boldsymbol{y})}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{y})}}(\boldsymbol{W}^{-\boldsymbol{1}})^{(\boldsymbol{y})} \tag{38}$$

Perhitungan premi tunggal bersih akan dihitung menggunakan rumuspada Persamaan (38). Dengan memodifikasi rumus pada Persamaan (38), sehingga atau dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}\rceil 13} &= \textstyle\sum_{a=0}^{4}\int_{a}^{a+1} e^{-\delta t}\left(1 - P_{13}^{(50+a)}(t)\right)\mu_{13}^{(50+a)}dt \\ &= \textstyle\sum_{a=0}^{4}\mu_{13}^{(50+a)}\int_{a}^{a+1}\left(e^{-\delta t} - e^{-\delta t}\sum_{(k=1)}^{3}P_{1k}^{(50)}(a)P_{k3}^{(50+a)}(t-a)\right)dt \\ &= \textstyle\sum_{a=0}^{4}\left[\mu_{13}^{(50+a)}e^{-a\delta}\left(\frac{(1-e^{-\delta})}{\delta} - \sum_{k=1}^{3}P_{1k}^{(50)}(a)\sum_{l=1}^{3}\frac{w_{kl}^{(50+a)}r_{l3}^{(50+a)}\left(1-e^{-(\delta-\lambda_l)}\right)}{(\delta-\lambda_l)}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}\rceil 13} = \textstyle\sum_{a=0}^{4}\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}\rceil 13(a)} \tag{39}$$

dengan

$$\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}\rceil 13(a)} = \mu_{13}^{(50+a)}e^{-a\delta}\left(\frac{(1-e^{-\delta})}{\delta} - \sum_{k=1}^{3}P_{1k}^{(50)}(a)\sum_{l=1}^{3}\frac{w_{kl}^{(50+a)}r_{l3}^{(50+a)}\left(1-e^{-(\delta-\lambda_l)}\right)}{(\delta-\lambda_l)}\right)$$

sehingga diperoleh

$$\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}\rceil 13} = 0.001501796 + 0.001557205 + 0.004912654 + 0.005122652 + 0.005271025 = 0.0183653$$

Agar diperoleh santunan sebesar Rp. 20.000.000,00, maka

$$20000000\bar{A}^{1}_{50:\bar{5}\rceil 13} = 20000000\ (0.0183653) = 367306.6438$$

Jadi premi tunggal bersih yang harus dibayarkan oleh Restu yang sedang sehat ketika mendaftar asuransi adalah sebesar Rp. 367.306,6438.

Selanjutnya akan ditentukan premi tunggal bersih saat Restu mendaftar pada kondisi sakit yaitu

$$\bar{A}^1_{50:\bar{5}\rceil 23} = \sum_{a=0}^{4} \bar{A}^1_{50:\bar{5}\rceil 23(a)}$$

$$\bar{A}^1_{50:\bar{5}\rceil 23(a)} = \mu_{23}^{(50+a)} e^{-a\delta}\left(\frac{(1-e^{-\delta})}{\delta} - \sum_{k=1}^{3} P_{2k}^{(50)}(a) \sum_{l=1}^{3} \frac{w_{kl}^{(50+a)} r_{l3}^{(50+a)}\left(1-e^{-(\delta-\lambda_l)}\right)}{(\delta-\lambda_l)}\right)$$

$$\bar{A}^1_{50:\bar{5}\rceil 23} = 0.00530888 + 0.00558953 + 0.00587687 + 0.0061823 + 0.0064905$$
$$= 0.02944808$$

Agar diperoleh santunan sebesar Rp. 20.000.000,00, maka

$$20000000\bar{A}^1_{50:\bar{5}\rceil 1} = 20000000\ (0.02944808) = 414639.0609$$

Jadi premi tunggal bersih yang harus dibayarkan oleh Restu yang sedang sakit ketika mendaftar asuransi adalah sebesar Rp. 414.639,0609.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa kondisi fisik manusia yang dikategorikan menjadi sehat, sakit, dan meninggal dapat dipandang sebagai suatu proses stokastik, yang dapatberubah secara acak dari waktu ke waktu. Setiap kemungkinan perubahan kondisi dapat dinyatakan sebagai peluang transisi. Formula peluang transisi dari kondisi fisik bergantung pada nilai eigen matriks laju transisi. Selanjutnya, premi tunggal bersih asuransi jiwa berjangka dengan menggunakan peluang transisi diperoleh

$$\bar{A}^1_{y:\overline{n}\rceil i3} = \int_0^n v^t\left(1 - P_{i3}(t)\right)\mu_{i3}(y+t)dt$$

dengan v^t adalah fungsi diskon, $P_{i3}(t)$ adalah peluang transisi seseorang pada kondisi i akan meninggal setelah t tahun dan $\mu(y+t)$ laju kematian seseorang berusia $y+t$ tahun. Nilai $P_{i3}(t)$ bergantung pada nilai eigen matriks laju transisi.

REFERENSI

Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Elementary Linear Agebra Applications Version 7th edition*. John Willey & Sons, Inc.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., & Nesbit, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics 2nd Edition*. The Society Of Actuaries.

Hogben, L. (2007). *Handbook of Linear Algebra*. Chapman & Hall.

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2013). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.

Jones, B. L. (1993). Modelling Multi-State Processes Using a Markov Assumption. *ARCH (Actuarial Research Clearing House)*, 239–248.

Jones, B. L. (1994). Actuarial Calculation using a Markov Model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 227–250.

Karlin, S., & Taylor, H. (1998). *An Introduction to Stochastic Modelling Third*

Edition. Academic Press.

Rakhman, A., & Effendie, A. R. (2013). *Matematika Aktuaria*. Universitas Terbuka Press.

Ross, S. (1996). *Stochastic Processes Second Edition*. John Willey & Sons, Inc.

Salman, M. A. S., & Borkar, V. C. (2016). Exponential Matrix and Their Properties. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR)*, *4*(1), 53–63.