Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.16 No.1 (Juni 2022) Hal. 40-51

KARAKTERISTIK UKURAN RISIKO DISTORSI

Rusidawati, Aprida Siska Lestia*, Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
**Email: as_lestia@ulm.ac.id*

ABSTRACT

Insurance is a risk transfer from the insured to the insurer. In general insurance companies are grouped into two types that life insurance and general insurance. For measure risk in general insurance the method used is using a measure of risk. In the study of risk management, there is one method forming risk measure known a distortion function. The purpose of this study is prove theorems of properties a measure of coherent and consistent risk of distortion. In this study explain the formation of a measure of risk distortion using a distortion function, indicates that if the distortion function is a concave function and shows the consistency of risk distortion measures preserve second order stochastic dominance and show coherence and consistency several of distortion risk measures. The results of this study concave distortion function is a necessary condition and sufficient condition for coherence and a strictly concave distortion function is a necessary condition and sufficient condition for strict ordering consistent with preserve second order stochastic dominance.

Keywords: *Risk Measure, Distortion Function, Coherence, Stochastic Dominance.*

ABSTRAK

Asuransi merupakan salah satu bentuk upaya pengalihan risiko dari tertanggung kepada pihak penanggung. Secara umum, perusahaan asuransi dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu asuransi jiwa dan asuransi umum. Untuk mengukur risiko dalam asuransi umum, cara yang digunakan adalah menggunakan ukuran risiko. Dalam kajian pengelolaan risiko terdapat satu metode pembentukan ukuran risiko yang dikenal dengan istilah fungsi distorsi. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan teorema-teorema dari sifat-sifat ukuran risiko distorsi yang koheren dan konsisten. Pada penelitian ini menjelaskan pembentukan ukuran risiko distorsi menggunakan fungsi distorsi, menunjukkan bahwa jika suatu fungsi distorsi merupakan suatu fungsi yang *cekung*, menunjukkan kekonsistenan ukuran risiko distorsi yang mempertahankan *second order stochastic dominance* dan menunjukkan kekoherenan dan kekonsistenan beberapa ukuran risiko distorsi. Dari penelitian ini diperoleh fungsi distorsi cekung adalah syarat perlu dan syarat cukup untuk suatu ukuran risiko distorsi dikatakan koheren. Sedangkan, syarat perlu dan cukup untuk suatu ukuran risiko distorsi dikatakan konsisten adalah jika fungsi distorsi tersebut cekung sempurna.

Kata Kunci: Ukuran risiko, fungsi distorsi, koheren, *stochastic dominance*.

Received: 5 April 2022 Accepted: 29 Mei 2022 Published: 17 Juni 2022

PENDAHULUAN

Risiko dalam asuransi dapat dideskripsikan sebagai suatu kejadian yang mungkin terjadi dan dapat membawa kerugian secara finansial. Jenis kejadian yang termasuk risiko dalam asuransi umum bisa termasuk dalam risiko yang besar atau risiko yang kecil, maka dari itu perlu dilakukan pengukuran risiko agar dapat mengurangi dan mengatasi risiko dalam bidang asuransi. Menurut (Artzner P. et al., 1999), cara yang digunakan untuk menentukan risiko pada asuransi umum adalah menggunakan ukuran risiko. Risiko sendiri dapat dideskripsikan sebagai suatu kejadian di masa yang akan datang yang berpotensi mendatangkan kerugian secara finansial. Ukuran risiko (*risk measure*) merupakan suatu pemetaan fungsional dari variabel acak kerugian kebilangan riil. Suatu ukuran risiko dikatakan baik jika koheren dan konsisten. Koheren dan konsisten diperkenalkan oleh (Artzner P. et al., 1999) dan dikenal luas sebagai sifat-sifat baik yang harus dipenuhi oleh suatu ukuran risiko. Dalam kajian pengelolaan risiko, terdapat satu metode pembentukan ukuran risiko yang didasarkan pada sebuah fungsi tidak turun yang dikenal dengan istilah fungsi distorsi (Wang, 1996). Melalui bentuk fungsi distorsi dapat diketahui apakah suatu ukuran risiko koheren dan konsisten atau tidak. Dalam penelitian ini akan dikaji mengenai syarat untuk suatu fungsi distorsi untuk bisa membentuk ukuran risiko yang koheren dan konsisten.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Distribusi Variabel Acak Kerugian

Definisi 1 (Klugman et al., 2012)
Misalkan $S_X(x)$ atau $S(x)$merupakan fungsi survival, untuk suatu variabel acak kontinu X dengan probabilitas X lebih besar dari angka yang diberikan. Sehingga didefinisikan sebagai berikut:

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \Pr(X > x) \tag{1}$$

Definisi 2 (Klugman et al., 2012)
Misalkan $p_X(x)$ atau $p(x)$ merupakan fungsi probabilitas atau yang disebut juga sebagai fungsi massa probabilitas, yang menggambarkan probabilitas berbeda ketika titiknya bukan 0 dan didefinisikan sebagai berikut:

$$p_X(x) = Pr(X = x) \tag{2}$$

Ekspektasi

Definisi 3 (Tse, 2009)
Misalkan sebuah fungsi $g(\cdot)$ dimana $g(x) = x$ saat $g(0) = 0$ dan $g(1) = 1$, sehingga rata-rata dari X yang dilambangkan dengan $E[X]$sebagai berikut:

$$E[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx = \int_0^\infty S_X(x)\, dx. \tag{3}$$

2. Kemonotonan dan Kecekungan

Definisi 4 (Edwin et al., 2003)
Andaikan f terdefinisi pada selang I (buka, tutup, atau tak satupun). Dikatakan bahwa:

(i). f *naik pada I jika, untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I.*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{4}$$

(ii). f *turun pada I jika, untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I.*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{5}$$

(iii). f *monoton murni pada I jika f naik pada I atau turun pada I.*

3. Fungsi Cembung dan Fungsi Cekung

Definisi 5 (Denuit et al., 2005)
Diberikan I himpunan bagian $\mathbb{R}$, dengan fungsi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan cembung jika untuk semua $x, y \in I$ dan semua $\alpha \in [0,1]$ berlaku ketidaksamaan berikut:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{6}$$

(i). *Untuk $x, y \in I$, $p, q \geq 0$ sedemikian sehingga $p + q > 0$.*

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \geq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

(ii). *Untuk $x_1 < x_2 < x_3 \in I$*

$$f(x_2) \leq \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3} f(x_1) + \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} f(x_3)$$

(iii). *Untuk $x_1, x_2, x_3 \in I$* sedemikian sehingga $x_1 < x_3$ dan $x_1, x_3 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

maka

$$f(x+z) - f(x) \leq f(y+z) - f(y) \tag{7}$$

Fungsi f disebut *strictly convex function* (fungsi cembung sempurna) jika tanda pertidaksamaan "≤" pada Persamaan (6) diganti dengan < (kurang dari). Selanjutnya disebut fungsi cekung jika "≤" diganti dengan "≥" atau *strictly concave function* (fungsi cekung sempurna) jika "≤" dapat diganti oleh ">".

4. Koheren

Menurut (Artzner P. et al., 1999), suatu ukuran risiko dikatakan koheren jika memenuhi sifat-sifat pada definisi berikut :

Definisi 6

(i). Terbatas atas oleh kerugian maksimum,

$$\rho(X) \leq \max(X) \tag{8}$$

(ii). Terbatas bawah oleh rata-rata kerugian,

$$\rho(X) \geq E(X) \tag{9}$$

(iii). Skalar aditif dan multiplikatif,

$$\rho(a\,X + b) = a\,\rho(X) + b, \;\; untuk\ a, b > 0 \tag{10}$$

(iv). Subadditif,

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \tag{11}$$

5. Fungsi Distorsi

Fungsi distorsi adalah metode pembentukan ukuran risiko yang didasarkan pada sebuah fungsi tidak turun, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 7 (Tse, 2009)
Fungsi distorsi adalah fungsi tidak turun $g(.)$ yang memenuhi $g(1) = 1$ dan $g(0) = 0$.

Definisi 8 (Tse, 2009)
Misalkan $g(.)$ adalah fungsi distorsi terbuka ke bawah. Ukuran risiko dari kerugian X sebagai berikut:

$$\rho(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))\,dx \tag{12}$$

6. *Stochastic Dominance*

Menurut (Andriyani et al., 2016) Stochastic dominance merupakan suatu teknik untuk memilih investasi yang berisiko tanpa harus menggunakan distribusi normal untuk tingkat keuntungan. *Stochastic dominance* menggunakan tiga asumsi tentang perilaku para investor, yaitu *first order, second order*, dan *third order*. *First order stochastic dominance* mengasumsikan bahwa pemodal lebih menyukai yang banyak daripada yang sedikit, *second order stochastic dominance* menyatakan bahwa pemodal bersikap *risk averse* atau tidak menyukai risiko, sedangkan *third order stochastic dominance* menyatakan bahwa pemodal mempunyai sikap *decreasing absolute risk aversion*, yang berarti jika kekayaannya bertambah akan lebih banyak dana yang diinvestasikan dalam aset yang berisiko. Untuk mempertimbangkan kerugian suatu ukuran risiko X dan Y yang sempurna maka ukuran risiko tersebut mempertahankan $\prec$ (stochastic ordering) sehingga diperoleh $X \prec Y \Rightarrow \rho(X) \le \rho(Y)$.

Definisi 9 (Wang, 1996)
Misalkan X melebihi Y pada first order stochastic dominance, jika fungsi distribusi dekumulatif X tidak melebihi nilai fungsi dekumulatif Y, jika:

$$X \prec_{1st} Y \qquad jika\ hanya\ jika\ S_X(t) \le S_X(t), untuk\ semua\ t \ge 0 \tag{13}$$

Pendefinisian second-order stochastic dominance sebagai berikut:

Definisi 10 (Wang, 1996)
Misalkan X kurang berisiko daripada $Y (X \prec_D Y)$ jika
(i). $E(X) \le E(Y)$, *dan*
(ii). *Terdapat satu kali perpotongan, sedemikian sehingga*

$$S_X(t) \le S_Y(t) \qquad untuk\ semua\ t \ge 0$$
$$S_X(t) \le S_Y(t) \qquad untuk\ suatu\ t \ge 0.$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini akan dilaksanakan melalui tahapan sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa jika suatu fungsi distorsi merupakan suatu fungsi yang cekung, maka ukuran risiko distorsinya merupakan ukuran risiko yang koheren.
2. Menunjukkan kekonsistenan ukuran risiko distorsi menggunakan *second order stochastic dominance*, yaitu:
   a. Menunjukkan bahwa jika suatu ukuran risiko dibangun dari suatu fungsi distorsi yang cekung sempurna, maka variabel acak kerugiannya dapat di urutkan menggunakan *second order stochastic dominance* dan akibatnya ukuran risikonya dapat diurutkan dengan ketentuan yang sama.
   b. Menunjukkan kondisi sebaliknya, yaitu jika suatu ukuran risiko dibangun dari suatu fungsi distorsi yang cekung tetapi tidak cekung sempurna maka tidak bisa diberlakukan *second order stochastic dominance*.

3. Menunjukkan kekoherenan dan kekonsistenan untuk ukuran risiko VaR melalui fungsi distorsinya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ukuran risiko distorsi menggunakan semua informasi dalam distribusi kerugian. Salah satu cara pengukuran risiko pada suatu ukuran risiko adalah dengan menggunakan pendekatan fungsi distorsi. Adapun ukuran risiko yang terkait dengan distorsi tersebut seperti VaR dan CTE. VaR atau *Value at Risk* merupakan ukuran risiko yang berdasarkan pada prinsip kuantil. Dalam (Bain & M., 1992) mendefinisikan kuantil sebagai sebarang nilai yang merupakan invers dari fungsi distribusi. Sedangkan CTE atau *Conditional Tail Expectation* menurut (Dhaene et al., 2006) adalah ukuran risiko yang merupakan rataan semua klaim yang nilainya lebih besar dari VaR. Ukuran risiko yang baik digunakan jika ukuran risiko tersebut memenuhi sifat-sifat dari Definisi 6. Berdasarkan Definisi 6, suatu ukuran risiko dikatakan koheren jika memenuhi sifat terbatas atas oleh kerugian maksimum (Sifat i), terbatas bawah oleh rata-rata kerugian (Sifat ii), standar aditif dan multiplikatif (Sifat iii) dan subadditif (Sifat iv).

1. Ukuran Risiko yang Koheren

Ukuran risiko yang diperoleh melalui fungsi distorsi sesuai Definisi 8 memenuhi Sifat (i), seperti yang ditunjukkan berikut ini:
(i). $\rho_g(X) \leq \max(X)$ (terbatas atas dengan kerugian maksimum), karena g adalah suatu fungsi yang meningkat dan memenuhi $g(0) = 0$ dan $g(1) = 1$ Maka,

$$g\big(S_X(x)\big) \leq 1 \quad \text{untuk} \quad x \leq \max(X),$$

dan
$$g\big(S_X(x)\big) = 0 \quad \text{untuk} \quad x > \max(X).$$

Sehingga, $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx \leq \int_0^{\max(X)} 1\, dx = \max(X)$.

Selanjutnya untuk Sifat (ii) akan dibuktikan melalui teorema berikut ini:

Teorema 1

Suatu ukuran risiko distorsi $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx$ *yang dibatasi oleh nilai rataan atau ekspektasi dari kerugian X jika hanya jika* $g(t) \geq t$ *untuk* $t\epsilon[0,1]$.
Bukti.
Pembuktian dari kanan ke kiri :
Diketahui fungsi distorsi g memenuhi $g(t) \geq t$ untuk $t\epsilon[0,1]$, maka

$$g\big(S_X(x)\big) \geq S_X(x)$$

menurut distribusi variabel acak kerugian maka menjadi:

$$\int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx \geq \int_0^\infty S_X(x)\, dx \tag{14}$$

berdasarkan Definisi 8, maka Persamaan (14) menjadi:

$$\rho_g(X) \geq \int_0^\infty S_X(x)\, dx \tag{15}$$

dan berdasarkan Definisi 3, maka diperoleh:

$$\rho_g(X) \geq E[X] \tag{16}$$

Pembuktikan dari kiri ke kanan:
Diketahui$\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx \geq E[X]$, berdasarkan Definisi 3 dengan fungsi survival $S_X(x) \in [0,1]$,

$$\int_0^\infty g\big(S_Y(y)\big)dy \geq \int_0^\infty S_Y(y)\,dy \tag{17}$$

Berdasarkan Definisi 4 maka Persamaan (17) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g\big(S_X(x)\big) \geq S_X(x) \tag{18}$$

Misalkan $S_X(x) = t$ maka Persamaan (18) menjadi:

$$g(t) \geq t \tag{19}$$

berdasarkan pembuktian dari kedua sisi, maka Teorema 1 terbukti bahwa $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx \geq E[X]$ ■

Ukuran risiko yang diperoleh melalui fungsi distorsi sesuai Definisi 8 memenuhi Sifat (iii), seperti yang ditunjukkan berikut ini :
(iii). $\rho_g(a\,X + b) = a\,\rho_g(X) + b$ (Scalar aditif dan multiplikatif) untuk $a, b \geq 0$,

$$S_{aX+b}(u) = \begin{cases} 1 & untuk\ 0 < u < b \\ S_X\left(\frac{u-b}{a}\right) & untuk\ u \geq b \end{cases}$$

Sehingga,

$$\rho_g(aX + b) = b + a\lim_{c\to\infty}\int_0^c g\big(S_X(t)\big)\,dt = a\rho_g(X) + b$$

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi distorsi g yang cekung merupakan syarat cukup dan perlu agar kondisi subadditif (Sifat iv) terpenuhi.

Teorema 2
Suatu ukuran risiko distorsi $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx$ yang subadditif jika hanya jika g adalah fungsi distorsi cekung.
Bukti.
Pembuktian dari kanan ke kiri:
Diketahui g adalah fungsi distorsi cekung dan perlu dibuktikan bahwa $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx$ adalah ukuran risiko distorsi yang subadditif.
Pembuktian akan dilakukan dengan menggunakan kondisi sebaliknya dimana ukuran risiko ρ_g tidak memenuhi sifat subadditif ($\rho_g(X+Y) > \rho_g(X) + \rho_g(Y)$). Misalkan g cembung sempurna pada $[a,b] \subseteq [0,1]$ dan $c = \frac{a+b}{2}$, untuk (a,b) menyatakan fungsi yang cembung sempurna. Misal $x_1 = c$, $x_2 = c + z$, $y_1 = c - z$, $y_2 = c$ dimana $x > y$ dan $z < 0$, maka berdasarkan Persamaan (7) dari Sifat (iii) diperoleh:

$$g(c+z) - g(c) > g(c) - g(c-z). \tag{20}$$

Diberikan variabel acak X dan Y menggunakan distribusi bersama diskrit yang disajikan dalam Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Distribusi bersama diskrit variabel acak X dan Y

		Y			
		$\mathbf{0}$	$\omega + \boldsymbol{z}/\mathbf{2}$	$\omega + \boldsymbol{z}$	$\sum$
X	$\mathbf{0}$	$1-c-z$	z	0	$1-c$
	$\omega + \boldsymbol{z}$	z	0	$c-z$	c
	$\sum$	$1-c$	z	$c-z$	1

dimana untuk variabel acak ini $w > 0$ dan $z < \frac{b-a}{2}$.

$$\rho_g(X) = (w+z)g(c). \tag{21}$$

$$\rho_g(Y) = \left(w + \frac{z}{2}\right) g(c) + \frac{z}{2} g(c-z). \tag{22}$$

$$\rho_g(X+Y) = \left(w + \frac{z}{2}\right) g(c+z) + \frac{z}{2} g(c) + [w+z] g(c-z). \tag{23}$$

Sehingga

$$\rho_g(X+Y) - \left(\rho_g(X) + \rho_g(Y)\right) > 0$$

$$\left(w + \frac{z}{2}\right) [g(c+z) - g(c) - (g(c) - g(c-z))] > 0 \tag{24}$$

karenanya, $\rho_g(X+Y) - \left(\rho_g(X) + \rho_g(Y)\right) > 0$ maka terbukti bahwa ρ_g tidak subadditif.

Pembuktian dari kiri ke kanan:

Diketahui $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx$ adalah ukuran risiko distorsi yang subadditif dan perlu dibuktikan bahwa g adalah fungsi distorsi cekung. Pembuktiannya akan dilakukan dengan menggunakan kondisi sebaliknya yaitu menggunakan pembuktian kontraposisi dimana ukuran risiko ρ_g tidak subadditif maka g merupakan fungsi distorsi cembung sempurna. Diberikan variabel acak X dan Y menggunakan distribusi bersama diskrit yang sama dari pembuktia, dimana untuk variabel acak ini $w > 0$ dan $< \frac{b-a}{2}$. Dengan langkah dan cara yang sama seperti pada pembuktian Teorema 2 dari Bukti 1.

Berdasarkan pembuktian dari kedua arah, maka Teorema 2 terbukti. ■

2. Ukuran Risiko yang Konsisten

Pada bagian ini akan menyelidiki lebih dalam perbedaan antara fungsi distorsi cekung sempurna dan fungsi distorsi cekung. Untuk mempertimbangkan kerugian suatu ukuran risiko X dan Y sempurna maka ukuran risiko tersebut mempertahankan $\prec$ (*stochastic ordering*) diperoleh $X \prec Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.

Teorema 3

Untuk suatu ukuran risiko $\rho_g(X) = \int_0^\infty g\big(S_X(x)\big)dx$ dengan $g(\,)$ merupakan fungsi cekung sempurna, jika $X \prec_{2nd} Y \Rightarrow \rho(X) < \rho(Y)$.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 10 untuk membuktikan bahwa ukuran risiko distorsi merupakan fungsi yang cekung sempurna dengan mempertahankan $X \prec_{2nd} Y$.

Dimisalkan $E[X] \leq E[Y]$ dan t_0 yang menjadi titik perpotongan sekali, oleh karena itu:

$$S_X(t) \geq S_Y(t) \quad untuk\ t < t_0$$
$$S_X(t) \leq S_Y(t) \quad untuk\ t \geq t_0$$

dan karena mempertahankan $X \prec_{2nd} Y$ maka hanya ada satu kemungkinan yang akan terjadi, yaitu:

$S_X(t) < S_Y(t)$ untuk beberapa $t > t_0$
atau $S_X(t) > S_Y(t)$ untuk beberapa $t < t_0$.

Selanjutnya, membuat fungsi distribusi dekomulatif yang baru dari $S_X(t) \geq S_Y(t)\ \ untuk\ t < t_0$ dan $S_X(t) \leq S_Y(t)\ \ untuk\ t \geq t_0$,

$$S_Z(t) = \max\{S_X(t),\ S_Y(t)\} = \begin{cases} S_X(t) & t < t_0 \\ S_Y(t) & t \geq t_0 \end{cases} \tag{26}$$

Sehingga,

$$\rho_g(Z) - \rho_g(X) = \int_{t_0}^{\infty} [g(S_Y(t)) - g(S_X(t))]dt \tag{27}$$

untuk $t > t_0, S(t_0) \geq S_Y(t) \geq S_X(t)$.
Diberikan $S_Y(t) = S_X(t)$ maka $\rho_g(Z) - \rho_g(X) = 0$ dan $S(t_0) > S_Y(t) > S_X(t)$ untuk beberapa $t > t_0$, maka berdasarkan Persamaan (7) dari Sifat (iii) dengan memisalkan $x_1 = S_X(t)$, $x_2 = S_Y(t)$, $y_1 = S_X(t)$, $y_2 = S(t_0)$ dimana $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ dan karena $S_Y(t) > S_X(t)$ maka $S_Y(t) - S_X(t) > 0$. Sehingga diperoleh:

$$g\big(S_Y(t)\big) - g\big(S_X(t)\big) > g'(S(t_0))\big(S_Y(t) - S_X(t)\big) \tag{28}$$

untuk $t > t_0$, dengan mensubtitusi Persamaan (28) ke ruas kanan dari Persamaan (27), sehingga diperoleh:

$$\rho_g(Z) - \rho_g(X) \geq g'\big(S(t_0)\big) \int_{t_0}^{\infty} S_Y(t) - S_X(t)\, dt \tag{29}$$

dan

$$\rho_g(Z) - \rho_g(Y) = \int_0^{t_0} [g(S_X(t)) - g(S_Y(t))]dt \tag{30}$$

untuk $t < t_0, S_X(t) \geq S_Y(t) \geq S(t_0)$.
Diberikan $S_Y(t) = S_X(t)$ maka $\rho_g(Z) - \rho_g(Y) = 0$ dan $S_X(t) > S_Y(t) > S(t_0)$ untuk beberapa $t < t_0$, maka berdasarkan Persamaan (7) dari Sifat (iii) dengan memisalkan $x_1 = S_Y(t)$, $x_2 = S_X(t)$, $y_1 = S(t_0)$, $y_2 = S_X(t)$ dimana $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ dan arena $S_X(t) > S_Y(t)$ maka $S_X(t) - S_Y(t) < 0$. Sehingga diperoleh:

$$g\big(S_X(t)\big) - g\big(S_Y(t)\big) < g'\big(S(t_0)\big)\big(S_X(t) - S_Y(t)\big) \tag{31}$$

untuk $t < t_0$, dengan mensubtitusi Persamaan (31) keruas kanan dari persamaan (30), sehingga diperoleh:

$$\rho_g(Z) - \rho_g(Y) \geq g'\big(S(t_0)\big) \int_0^{t_0} [S_X(t) - S_Y(t)]\, dt \tag{32}$$

Untuk mengatasi ketimpangan yang sempurna itu perlu mengurangkan Persamaan (29) atau (32), sehingga didapatkan:

$$\rho_g(Y) - \rho_g(X) > g'\big(S(t_0)\big) \int_0^\infty [S_Y(t) - S_X(t)]\, dt \geq 0 \tag{33}$$

dari Persamaan (33) yang dihasilkan adalah $\rho_g(Y) > \rho_g(X)$.■

Teorema 4

Suatu ukuran risiko distorsi berasal dari fungsi distorsi yang cekung tetapi tidak cekung sempurna dan tidak mempertahankan dominasi stokastik urutan kedua (second order stochastic dominance).

Bukti.

Untuk menunjukkan ukuran risiko yang berasal dari fungsi distorsi cekung tetapi tidak cekung sempurna dan tidak mempertahankan dominasi stokastik urutan kedua maka untuk membuktikan teorema ini serupa dengan Teorema 3. Untuk setiap risiko kerugian X dapat juga dibangun risiko kerugian Y dari $E[X] = E[Y]$ dan dimana ada t_0 yang menjadi titik perpotongan sekali, seperti $S_X(t_0) = S_Y(t_0) = b$ dan $g(b)$ yang terletak pada satu bagian linier dari fungsi distorsi. Anggap bahwa bagian linear yang mengandung $g(b)$ mencakup rentang dari $g(a)$ ke $g(c)$ dimana $a < b < c$, dengan menggunakan fungsi distribusi dekomulatif,

$$S_Y(t) \begin{cases} = S_X(t) & untuk\ t \geq t_a \\ = a & untuk\ t = t_a \\ \leq S_X(t) & untuk\ t_a \geq t \geq t_b \\ = b & untuk\ t = t_b \\ \geq S_X(t) & untuk\ t_b \geq t \geq t_c \\ = S_X(t) & untuk\ t \leq t_c \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 9, dengan mempertahankan $X \prec_{2nd} Y$ maka dapat dinyatakan

$S_X(t) < S_Y(t)$ untuk beberapa $t_a < t < t_b$

atau $S_X(t) > S_Y(t)$ untuk beberapa $t_b < t < t_c$

Selanjutnya didefinisikan,

$$S_Z(t) = \max\{S_X(t),\, S_Y(t)\} = \begin{cases} S_X(t) & t_a \geq t \geq t_b \\ S_Y(t) & t_b \geq t \geq t_c \end{cases}$$

dan diperoleh

$$\rho_g(Z) - \rho_g(X) = \int_0^{t_c} [g(\,S_Y(t)) - g(S_X(t))]dt = 0 \tag{34}$$

untuk $t \leq t_c, S(t_0) \geq S_Y(t) \geq S_X(t)$.

Diberikan $S_Y(t) = S_X(t)$ maka $\rho_g(Z) - \rho_g(X) \leq 0$ dan $S(t_0) > S_Y(t) > S_X(t)$ untuk beberapa $t \leq t_c$, maka berdasarkan Persamaan (2.13) dari Sifat (iii) dengan memisalkan $x_1 = S_X(t)$, $x_2 = S_Y(t)$, $y_1 = S_X(t)$, $y_2 = S(t_0)$ dimana untuk $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Maka,

$$g\big(S_Y(t)\big) - g\big(S_X(t)\big) > g'(S(t_0))\big(S_Y(t) - S_X(t)\big)$$

Yang jika disubtitusikan ke ruas kanan Persamaan (34), diperoleh

$$\rho_g(Z) - \rho_g(X) = g'\big(S(t_0)\big) \int_{t_b}^{t_a} S_Y(t) - S_X(t)\, dt \tag{35}$$

Selanjutnya

$$\rho_g(Z) - \rho_g(X) = \int_{t_a}^{\infty} [g(S_Y(t)) - g(S_X(t))]dt = 0 \qquad (36)$$

untuk $t \geq t_a, S_X(t) \geq S_Y(t) \geq S(t_0)$.
Diberikan $S_Y(t) = S_X(t)$ maka $\rho_g(Z) - \rho_g(X) \geq 0$ dan $S_X(t) > S_Y(t) > S(t_0)$ untuk beberapa $t \geq t_a$, maka berdasarkan Persamaan (2.13) dari Sifat (iii) dengan memisalkan $x_1 = S_Y(t)$, $x_2 = S_X(t)$, $y_1 = S(t_0)$, $y_2 = S_X(t)$ dimana untuk $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Maka,

$$g\big(S_X(t)\big) - g\big(S_Y(t)\big) < g'(S(t_0))\big(S_X(t) - S_Y(t)\big)$$

untuk $t \geq t_a$, yang jika disubtitusikan ke ruas kanan Persamaan (36), diperoleh

$$\rho_g(Z) - \rho_g(Y) = g'\big(S(t_0)\big) \int_{t_c}^{t_b} S_X(t) - S_Y(t)\, dt \qquad (37)$$

Dengan mengurangkan Persamaan (35) dan (37), sehingga didapatkan:

$$\rho_g(Y) - \rho_g(X) = g'\big(S(t_0)\big) \int_{t_c}^{t_a} [S_Y(t) - S_X(t)]\, dt = 0$$

$$\rho_g(Y) = \rho_g(X) \quad \blacksquare$$

Berikutnya disajikan fungsi distori $g(t)$ yang menghasilkan ukuran risiko *Value at Risk* atau VaR yang penentuan nilainya menggunakan prinsip kuantil.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & untuk\ 0 \leq t < 1 - \alpha \\ 1 & untuk\ 1 - \alpha \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi $g(t)$ untuk VaR merupakan fungsi yang cembung, menggunakan Definisi 5.

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y). \qquad (38)$$

Misalkan: $\alpha = 0{,}2; x = 0{,}6; y = 0{,}9$
Diperoleh

$$g(t) = \begin{cases} 0 & untuk\ 0 \leq t < 0{,}98 \\ 1 & untuk\ 0{,}98 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha x + (1-\alpha)y = 0{,}2 \times 0{,}6 + (0{,}8 \times 0{,}9) = 0{,}84$
maka,
$g(0{,}84) = 1$
dan
$\alpha g(x) = 0{,}2g(0{,}6) = 0{,}2 \times 0 = 0$
Selanjutnya untuk ruas kiri Pertidaksamaan (38)
$(1-\alpha)g(y) = (1-0{,}2)g(0{,}9) = 0{,}8 \times 1 = 0{,}8$
Sehingga,

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$$
$$g\big(0{,}2 \times 0{,}6 + (0{,}8 \times 0{,}9)\big) \leq 0{,}2g(0{,}6) + (1-0{,}2)g(0{,}9)$$
$$g(0{,}84) \leq 0 + 0{,}8$$

karena $1 > 0{,}8$, maka $g(t)$ untuk VaR tidak cembung.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian pada pembahasan dapat disimpulkan bahwa Ukuran risiko distorsi yang memenuhi sifat subadditif merupakan suatu ukuran risiko yang baik. Jika sifat subadditif terpenuhi, maka artinya ukuran risiko untuk dua risiko yang digabungkan akan lebih kecil dibandingkan ukuran dari risiko itu masing-masing. Pembuktian sifat subadditif pada suatu ukuran risiko yang berasal dari fungsi distorsi dan dapat dilihat melalui sifat-sifat fungsi itu sendiri ataupun menggunakan *Stochastic Order*. Fungsi distorsi itu terdiri dari fungsi distorsi cekung dan fungsi distorsi cekung sempurna. Syarat yang digunakan untuk fungsi distorsi cekung adalah syarat perlu dan syarat cukup untuk suatu ukuran risiko distorsi dikatakan koheren. Sedangkan, syarat perlu dan cukup untuk suatu ukuran risiko distorsi dikatakan konsisten adalah jika fungsi distorsi tersebut cekung sempurna dengan mempertahankan *second order stochastic dominance.*

REFERENSI

Andriyani, L., Farida, & Machfiroh, D. L. (2016). Analisis Komparatif Pembentukan Portofolio Optimal Menggunakan Capital Asset Pricing Model (CAPM) Dan Stochastic Dominance. *Bisnis & Ekonomi*, *14*(1), 19–33.

Artzner P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath D. (1999). Coherent measures of risk. *Math. Finance*, *9*(3), 203–228.

Bain, L. J., & M., E. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics 2nd Edition*. Duxbury Press.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, G., & Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*. JohnWiley & Sons Ltd.

Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Tang, Q., & Vyncke, D. (2006). Risk Measures and Comonotonicity: A Review. *Stochastic Models*, *22*(4), 573–606.

Edwin, J., Purcell, & Ridgon. (2003). *Kalkulus, Edisi Ke-8*. Erlangga.

Hürlimann, W. (2004). Distortion Risk Measures and Economic Capital. *North American Actuarial Journal*, *8*(1), 86–95.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., & G.E., W. (2012). *Loss Models: From Data to Decisions. Probability and Statistics*. John Wiley & Sons.

Tse, Y. K. (2009). *Nonlife Actuarial Models Theory, Methods and Evaluation*. United States of America by Cambridge University Press.

Wang, S. S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin 1996 Waterloo, Canada*, *26*, 71–92.

Wirch, J. L., & M.R., H. (2001). *Distortion Risk Measures: Coherence and Stochastic Dominance*. University of Waterloo.