Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
Vol.10 No.1 (2016) Hal. 21-30

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL LINIER HOMOGEN DENGAN METODE MITTAG-LEFFLER

Helfa Oktafia Afisha, Yuni Yulida*, Nurul Huda

Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
**Email : y_yulida@unlam.ac.id*

ABSTRAK

Kalkulus klasik hanya mempelajari turunan sekaligus persamaan diferensial berorde bilangan bulat, sedangkan untuk turunan dan persamaan diferensial berorde tak bulat tidak tercakup di dalamnya. Sehingga muncullah konsep kalkulus fraksional yang mempelajari integral dan turunan berorde tak bulat yang disingkat diferintegral termasuk persamaan diferensial berorde fraksional (PDF). Pada paper ini disajikan metode untuk memperoleh solusi PDF linier homogen yang dibangun dalam fungsi Mittag-Leffler yang berbentuk deret

$$y(x) = E_\alpha(bx^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

Deret ini konvergen untuk x pada $\left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$. Pencarian turunan dari $y(x)$, dilakukan dengan menurunkan setiap suku dari $y(x)$ menggunakan definisi turunan Caputo dilanjutkan dengan menentukan koefisien b^k untuk memperoleh solusi PDF tersebut.

Kata Kunci: *Kalkulus Fraksional, Fungsi Mittag-Leffler dan Persamaan Diferensial Fraksional*

1. PENDAHULUAN

Kalkulus fraksional adalah bidang matematika analisis yang membahas teori serta aplikasi integral dan turunan berorde sebarang. Sejarah kalkulus fraksional bermula dari pertanyaan G.W Leibniz kepada L’Hôpital pada tahun 1695 tentang makna dari “ $d^n y/dx^n$ jika $n = 1/2$, bagaimanakah jika n fraction/pecahan”. Sejak saat itu para matematikawan terus mengembangkan topik tersebut seperti, L. Euler, P.S Laplace, J.B.J Fourier, N.H. Abel, J. Liouville, B. Riemann, A.K. Grunwald, A.V. Letnikov [7]. Perkembangan kalkulus fraksional membawa kepada pengaplikasiannya berupa persamaan diferensial fraksional (PDF) yaitu suatu persamaan yang turunannya memuat orde pecahan.

PDF telah diaplikasikan dalam kasus aliran fluida, kekentalan, teori kontrol untuk sistem dinamik, jaringan listrik, peluang, statistik, dan lain sebagainya [6]. Berbagai metode telah dikembangkan untuk mendapatkan solusi PDF sehingga memberikan kemudahan dalam pengaplikasian, diantaranya adalah metode iterasi, teknik transformasi Fourier, teknik transformasi Laplace, metode Dekomposisi

Adomian, metode iterasi variasi dan metode Peturbasi Homotopy. Salah satu metode baru dikembangkan oleh Rida dan Arafa [11] yaitu metode yang menggunakan fungsi Mittag-Leffler dengan pendefinisian turunannya menggunakan pendekatan Caputo.

Pada paper ini membahas kembali tulisan Rida dan Arafa [11], pada bagian pendahuluan membahas tentang pengenalan singkat mengenai kalkulus fraksional juga latar belakang dalam mengangkat topik yang diambil. Pada bagian kedua, menyajikan materi-materi yang digunakan dalam hasil. Bagian ketiga, menggambarkan langkah-langkah untuk mendapatkan hasil. Bagian keempat memberikan hasil dan pembahasan. Bagian kelima, menyajikan kesimpulan serta saran.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi-Fungsi Khusus Kalkulus Fraksional

Berikut disajikan fungsi-fungsi yang berperan penting dalam kalkulus fraksional yaitu fungsi eksponensial, fungsi gamma dan fungsi Mittag-Leffler :

Definisi 1 [11]

Huruf e menyatakan bilangan real positif unik sedemikian sehingga $ln\, e = 1$.

Fungsi eksponensial dapat dinyatakan ke dalam deret, sebagai berikut :

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Definisi 2 [12]

Misalkan n *adalah bilangan bulat positif. Besaran* n *faktorial (simbol* $n!$*) didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara* 1 *hingga* n.

$$n! = 1.2.3 \ldots (n-1)n$$

Definisi 3 [2]

Diberikan fungsi $\Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Fungsi gamma pada bilangan riil yang dinyatakan oleh* $\Gamma(\alpha)$ *didefinisikan sebagai :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0 \tag{2}$$

Definisi 4 [1]

Fungsi Gamma adalah :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.\ldots.n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)(x+n)} n^x$$

dimana x *bilangan riil atau kompleks, dan* $x \notin \{0\} \cup \{\mathbb{Z}^-\}$.

Dengan mensubstitusi $\Gamma(x)$ dengan $x = x + 1$, diperoleh persamaan berikut :

$$\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$$

Bentuk fungsi Mittag-Leffler satu parameter α yaitu :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \; z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

2.2 Integral dan Turunan Fraksional

Berikut bentuk dari integral lipat sebarang α, dengan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ **[6]:**

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

Definisi 5 [5]

Diberikan $\alpha \in (k-1, k)$ *dengan* $\alpha \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$ *dan* $f(t)$ *merupakan fungsi yang terturunkan sampai ke-k. Turunan fraksional dari* $f(t)$ *dalam notasi Caputo, didefinisikan sebagai:*

$$^C D_{a=0}^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(x)\, dx$$

untuk $k-1 < \alpha \leq k$, *dengan* $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dt^k} f(x)$ *merupakan turunan ke- k.*

Turunan fungsi konstan, berdasarkan Definisi 5 bernilai nol, seperti berikut :

$$^C D_{a=0}^\alpha f(t) = 0 \,, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ dan } f(t) \text{ konstan} \tag{3}$$

Definisi 6 [3]

Turunan fraksional dari $f(t)$, *dengan f(t) adalah fungsi monomial dituliskan sebagai:*

$$D^\alpha f(t) = D^\alpha\, y^m$$
$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} t^{m-\alpha}$$

untuk $k-1 < \alpha < k,\ m > k-1,\ \alpha \in \mathbb{R}^+$

2.2 Deret Pangkat

Definisi 7 [13]

Jika terdapat suatu deret yang berbentuk

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Misalkan s_n *melambangkan jumlah parsial ke*$-n$:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Jika barisan $\{s_n\}$ *konvergen dan* $lim_{n\to\infty} s_n = s$ *ada, sebagai suatu bilangan real, maka deret* $\sum a_n$ *disebut konvergen dan dituliskan sebagai*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s \text{ atau } \sum_{i=1}^\infty a_n = s$$

Bilangan s ini disebut jumlah dari deretnya. Jika tidak demikian, maka deret tersebut dikatakan divergen.

Kemudian akan disajikan tentang deret pangkat yang berbentuk :

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

dimana x adalah sebuah variabel dan a_n adalah konstanta yang disebut koefisien deret.

Teorema 8 [10]
Andaikan $\sum a_n$ *sebuah deret yang sukunya positif dan andaikan*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

a. *Jika* $L < 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen mutlak (jadi konvergen)*
b. *Jika* $L > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen*
c. *Jika* $L = 1$, *pengujian ini tidak dapat memberikan kepastian.*

2.3 Persamaan Diferensial Fraksional Linier Homogen

Persamaan diferensial fraksional adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fraksional. Secara umum persamaan diferensial fraksional linier homogen dengan orde $n\alpha$ dituliskan sebagai :

$$D^{n\alpha}y(x) + A_1 D^{(n-1)\alpha}y(x) + A_2 D^{(n-2)\alpha}y(x) + \cdots + A_n y(x) = 0 \quad (4)$$

dimana $D^{n\alpha}$ adalah turunan orde tertinggi fraksional dengan $\alpha \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ dan $x \geq 0$, dimana A_n adalah koefisien konstan dan $y(x)$ adalah fungsi yang kontinu dan terturunkan. **[7]**

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun prosedur pada penelitian ini adalah mempelajari materi yang berhubungan dengan kalkulus fraksional, kekonvergenan dan turunan fungsi Mittag-Leffler serta tentang persamaan diferensial fraksional linier homogen. Selanjutnya menjelaskan kekonvergenan dan turunan fungsi Mittag-Leffler. Sedangkan untuk memperoleh solusi PDF dengan menuliskan fungsi $y(x)$ dalam bentuk fungsi Mittag-Leffler, menurunkan fungsi Mittag-Leffler sesuai orde yang termuat dalam PDF, mensubstitusi fungsi Mittag-Leffler dan turunannya pada PDF kemudian menentukan koefisien untuk memperoleh solusi umum.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Kekonvergenan dan Turunan Fungsi Mittag-Leffler

Fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ didefinisikan dalam bentuk deret yang berlaku pada seluruh bidang kompleks berikut :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Fungsi Mittag-Leffler pada persamaan (5) didefinisikan oleh peubah z dalam fungsi kompleks. Namun dalam penerapannya akan digunakan fungsi Mittag-Leffler dengan peubah dalam fungsi real. Bilangan real, $\mathbb{R}$, dapat dinyatakan sebagai bagian dari himpunan $\mathbb{C}$ dengan menyatakan setiap bilangan real sebagai bilangan kompleks. Diberikan bilangan kompleks $z = x + iy$, sedangkan konjugate dari bilangan kompleks z, dituliskan sebagai $\bar{z} = x - iy$.

Modulus yang menyatakan panjang vektor (x, y) dari z dan konjugatenya , masing-masing diberikan oleh :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{7}$$

Dari persamaan (6) dan (7) memperlihatkan salah satu sifat modulus yaitu $z = \bar{z}$. Secara khusus, jika $z = x + iy$ adalah bilangan real ($y = 0$) maka

$$|z| = \sqrt{x^2} = x \tag{8}$$

Persamaan (8) merupakan Definisi dari nilai mutlak suatu bilangan real x. Ini menunjukkan bahwa modulus dari suatu bilangan kompleks merupakan perluasan dari konsep nilai mutlak pada bilangan real. Sehingga fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ dengan fungsi z dalam persamaan (5) akan berbentuk :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\alpha+1)} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(x)$ berperan penting dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde fraksional. Fungsi Mittag-Leffler didefinisikan untuk fungsi $y(x)$, berikut :

$$y(x) = E_\alpha(bx^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \tag{9}$$

dengan b adalah konstanta dan $\alpha \in \mathbb{R}^+$. [11]

4.1.1 Kekonvergenan Fungsi Mittag-Leffler

Berikut akan diselidiki kekonvergenan untuk Deret pada persamaan (9), berdasarkan Teorema **[8]**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

Misalkan $a_k = \frac{b^k x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$ maka $a_{k+1} = \frac{b^{k+1} x^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}$

maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left|b^{k+1} \frac{x^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\right|}{\left|b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\right|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{|b^{k+1}.x^{(k+1)\alpha}\,\Gamma(k\alpha+1)|}{|b^k.x^{k\alpha}\,\Gamma((k+1)\alpha+1)|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{|b.x^\alpha\,\Gamma(k\alpha+1)|}{|\Gamma((k+1)\alpha+1)|} \\
&= |b.x^\alpha| \lim_{k\to\infty} \frac{|k\alpha\,\Gamma(k\alpha)|}{|(k+1)\alpha\,\Gamma((k+1)\alpha)|}
\end{aligned}$$

Bentuk tersebut memiliki nilai k dengan pangkat tertinggi satu, meskipun rumus rekursif dari fungsi gamma dilanjutkan, sehingga dibagi dengan $\frac{k}{k}$, diperoleh :

$$= |b.x^{\alpha}| \frac{\lim_{k\to\infty} |k\alpha\, \Gamma(k\alpha)|}{\lim_{k\to\infty} |(k+1)\alpha\, \Gamma((k+1)\alpha)|} : \frac{k}{k}$$
$$= |b.x^{\alpha}|.1$$

Jadi deret (9) konvergen untuk $|x| < \frac{1}{b}$ dan divergen untuk $|x| > \frac{1}{b}$ dengan jari-jari kekonvergenannya yaitu $R = \left|\frac{1}{b}\right|$ sehingga mempunyai selang kekonvergenan $(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b})$.

4.1.2 Turunan Fungsi Mittag-Leffler

Berikut diberikan turunan deret (9), $y(x)$ dengan orde $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$D^{\alpha}y(x) \quad = D^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

$$= D^{\alpha}(b^0 \frac{x^{0.\alpha}}{\Gamma(0.\alpha+1)} + b^1 \frac{x^{1.\alpha}}{\Gamma(1.\alpha+1)} + b^2 \frac{x^{2.\alpha}}{\Gamma(2.\alpha+1)} + b^3 \frac{x^{3.\alpha}}{\Gamma(3.\alpha+1)} + b^4 \frac{x^{4.\alpha}}{\Gamma(4.\alpha+1)} + b^5 \frac{x^{5.\alpha}}{\Gamma(5.\alpha+1)} + \cdots)$$

$$= D^{\alpha}b^0 \frac{x^{0.\alpha}}{\Gamma(0.\alpha+1)} + D^{\alpha}b^1 \frac{x^{1.\alpha}}{\Gamma(1.\alpha+1)} + D^{\alpha}b^2 \frac{x^{2.\alpha}}{\Gamma(2.\alpha+1)} + D^{\alpha}b^3 \frac{x^{3.\alpha}}{\Gamma(3.\alpha+1)} + D^{\alpha}b^4 \frac{x^{4.\alpha}}{\Gamma(4.\alpha+1)} + D^{\alpha}b^5 \frac{x^{5.\alpha}}{\Gamma(5.\alpha+1)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1)} D^{\alpha}1 + \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)} D^{\alpha} \quad x^{\alpha} + \frac{b^2}{\Gamma(2\alpha+1)} D^{\alpha}x^{2\alpha} + \frac{b}{\Gamma(3\alpha+1)} D^{\alpha}x^{3\alpha} + \frac{b^4}{\Gamma(4\alpha+1)} D^{\alpha}x^{4\alpha} + \frac{b^5}{\Gamma(5\alpha+1)} D^{\alpha}x^{5\alpha} + \cdots \tag{10}$$

Untuk turunan orde fraksional dari fungsi konstan, berdasarkan persamaan (3) maka untuk suku ke-1 dari persamaan (10) diperoleh :

$$D^{\alpha}1 = 0 \tag{11}$$

Sedangkan turunan untuk fungsi berbentuk $y(x) = x^{\alpha}$, berdasarkan Definisi 6 maka :

$$D^{\alpha}x^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} x^{\alpha-\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} x^0 = \Gamma(\alpha+1)1 \tag{12}$$

$$D^{\alpha}x^{2\alpha} = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1-\alpha)} x^{2\alpha-\alpha} = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \tag{13}$$

$$D^{\alpha}x^{3\alpha} = \frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1-\alpha)} x^{3\alpha-\alpha} = \frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} x^{2\alpha} \tag{14}$$

$$D^{\alpha}x^{4\alpha}=\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1-\alpha)}x^{4\alpha-\alpha}=\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}x^{3\alpha} \quad (15)$$

$$D^{\alpha}x^{5\alpha}=\frac{\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1-\alpha)}x^{5\alpha-\alpha}=\frac{\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)}x^{4\alpha} \quad (16)$$

.
.
.
dst

Persamaan (11) dan (12) - (16) disubstitusi ke persamaan (10), diperoleh :

$$D^{\alpha}y(x)=0+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)+\frac{b^2}{\Gamma(2\alpha+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}+\frac{b^3}{\Gamma(3\alpha+1)}\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}x^{2\alpha}+\frac{b^4}{\Gamma(4\alpha+1)}\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}x^{3\alpha}+\frac{b^5}{\Gamma(5\alpha+1)}\frac{\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)}x^{4\alpha}+\cdots$$

$$=b+\frac{b^2}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}+\frac{b^3}{\Gamma(2\alpha+1)}x^{2\alpha}+\frac{b^4}{\Gamma(3\alpha+1)}x^{3\alpha}+\frac{b^5}{\Gamma(4\alpha+1)}x^{4\alpha}+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}b^k\frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha+1)} \quad (17)$$

Turunan $y(x)$ jika diperumum dengan orde $n\alpha$, dinyatakan sebagai :

$$D^{\alpha}y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b^k\frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha+1)}$$

$$D^{2\alpha}y(x)=\sum_{k=3}^{\infty}b^k\frac{x^{(k-2)\alpha}}{\Gamma((k-2)\alpha+1)}$$

$$D^{3\alpha}y(x)=\sum_{k=3}^{\infty}b^k\frac{x^{(k-3)\alpha}}{\Gamma((k-3)\alpha+1)}$$

$$\vdots$$

$$D^{(n-1)\alpha}y(x)=\sum_{k=n-1}^{\infty}b^k\frac{x^{(k-(n-1))\alpha}}{\Gamma((k-(n-1))\alpha+1)}$$

$$D^{n\alpha}y(x)=\sum_{k=n}^{\infty}b^k\frac{x^{(k-n)\alpha}}{\Gamma((k-n)\alpha+1)} \quad (18)$$

4.2 Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Linier Homogen

Diberikan secara umum persamaan diferensial fraksional linier homogen dengan orde $n\alpha$ dituliskan sebagai berikut :

$$D^{n\alpha}y(x)+A_1D^{(n-1)\alpha}y(x)+A_2D^{(n-2)\alpha}y(x)+\cdots+A_ny(x)=0 \quad (19)$$

Solusi untuk persamaan (19) dengan asumsi bahwa fungsi $y(x)$ memenuhi Definisi Caputo dan dapat dibentuk ke dalam persamaan (9), dapat diselesaikan dengan menentukan nilai-nilai koefisien pada persamaan (9). Secara umum, langkah-langkahnya sebagai berikut :

1. Menuliskan fungsi $y(x)$ dalam bentuk fungsi Mittag-Leffer, seperti pada persamaan (9)
2. Menurunkan fungsi pada persamaan (19) sesuai orde dari tiap suku, seperti pada persamaan (18) kemudian disubstitusi ke persamaan (19) kembali. Sehingga diperoleh :

$$\sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{x^{(k-n)\alpha}}{\Gamma((k-n)\alpha+1)} + A_1 \sum_{k=n-1}^{\infty} b^k \frac{x^{(k-(n-1))\alpha}}{\Gamma((k-(n-1))\alpha+1)} + A_2 \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{(k-(n-2))\alpha}}{\Gamma((k-(n-2))\alpha+1)} + \dots + A_{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} b^k \frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma((k-1)\alpha+1)} + A_n \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = 0$$

Pada persamaan di atas, batas bawah dari $\sum$, berbeda sehingga batas bawahnya akan disamadengankan nol, sehingga menjadi :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{k+n} \frac{x^{(k+n-n)\alpha}}{\Gamma((k+n-n)\alpha+1)} + A_1 \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+n-1} \frac{x^{(k+n-1-(n-1))\alpha}}{\Gamma((k+n-1-(n-1))\alpha+1)} + A_2 \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+n-2} \frac{x^{(k+n-2-(n-2))\alpha}}{\Gamma((k+n-2)-(n-2))\alpha+1)} + \cdots + A_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+1} \frac{x^{(k+1-1)\alpha}}{\Gamma((k+1-1)\alpha+1)} + A_n \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+n} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + A_1 \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+n-1} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + A_2 \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+n-2} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + \cdots + A_{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+1} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + A_n \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [b^{k+n} + A_1 b^{k+n-1} + A_2 b^{k+n-2} + \cdots + A_{n-1} b^{k+1} + A_n b^k] \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = 0 \qquad (20)$$

3. Untuk menentukan nilai-nilai koefisien $b^{k+n} + b^{k+n-1} + b^{k+n-2} + \cdots + b^{k+1} + b^k$ dari persamaan (20), misal :
$b^{k+n} + A_1 b^{k+n-1} + A_2 b^{k+n-2} + \cdots + A_{n-1} b^{k+1} + A_n b^k = r$
maka dapat ditulis:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = 0$$

Selanjutnya, karena nilai $\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \neq 0$, akibatnya $r = 0$, sehingga

$$b^{k+n} + A_1 b^{k+n-1} + A_2 b^{k+n-2} + \cdots + A_{n-1} b^{k+1} + A_n b^k = 0$$

$$\Leftrightarrow b^{k+n} = -(A_1 b^{k+n-1} + A_2 b^{k+n-2} + \cdots + A_{n-1} b^{k+1} + A_n b^k) \qquad (21)$$

4. Mensubstitusi persamaan (21) ke persamaan (9) untuk memperoleh solusi umum persamaan (19) dalam bentuk deret.

5. KESIMPULAN

Fungsi Mittag-Leffler yang berbentuk deret $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$ dengan b adalah konstanta dan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ merupakan deret yang konvergen pada selang $\left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$ sehingga turunan Fungsi Mittag-Leffler dengan orde $n\alpha$ diberikan oleh : $D^{n\alpha} y(x) = \sum_{k=n}^{\infty} b^k \frac{x^{(k-n)\alpha}}{\Gamma((k-n)\alpha+1)}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Solusi PDF linier homogen dari $D^{n\alpha} y(x) + A_1 D^{(n-1)\alpha} y(x) + A_2 D^{(n-2)\alpha} y(x) + \cdots + A_n y(x) = 0$ dinyatakan berbentuk fungsi Mittag-Leffler. Pada metode Mittag-Leffler ini, koefisien b^k dapat ditentukan melalui :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (b^{k+n} + A_1 b^{k+n-1} + A_2 b^{k+n-2} + \cdots + A_{n-1} b^{k+1} + A_n b^k) \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = 0$$

dengan $b^{k+n} + A_1 b^{k+n-1} + A_2 b^{k+n-2} + \cdots + A_{n-1} b^{k+1} + A_n b^k = 0$

6. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada kedua pembimbing yang telah membantu dalam menyelesaikan tulisan ini.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Arfken, G.B. dan Hans J.W. 2005. *Mathematical Methods for Physicist.* Elsevier Academic Press, United States of America.

[2] Boas, M.L. 2006. *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* DePaul University, United States of America.

[3] Bologna, Mauro. 2007. *Short Introduction to Fractional Calculus*, Arica, Chile.

[4] Gorenflo, R. and Mainardi, F. 1997. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional orde,” *in Fractals Fractional Calculus in Continuum Mechanics”*, A. Carpinteri and F. Mainar, Eds., pp.223–276, Springer, New York, NY, USA.

[5] Kaczorek, T. 2008. *Fractional Positive Continuous-Time Linier Systems And Their Reachability*. Int J. Appl. Math. Comput. Sci., 2008, Vol. 18, No. 2. 223-228. DOI: 10.2478/v10006-008-0020-0.

[6] Kisela, T. 2008. *Fractional Differential Equations and Their Applications*. Tesis. Program diploma, BRNO University of Technology.

[7] Miller, K. S and Ross, B. 1993.*An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*,JohnWiley & Sons, New York, NY, USA.

[8] Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, NY, USA.

[9] Purcel, E. J, et al. 2008. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.

[10] Purcel, E. J, & Vanberg, D. 1987. *Kalkulus Jilid 1*. Edisi Kedelapan. Erlangga, Jakarta.

[11] Rida, S.Z & Arafa, A. A. M., 2011. New Method for Solving Linear Fractional Differential Equations,"*International Journal of Differential Equations*, Volume 2011, Article ID 814132, 8 pages.

[12] Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. ANDI, Yogyakarta.

[13] Stewart, James. 2010. *Kalkulus*. Edisi Kelima. *(Terjemahan Chriswan Sungkono*). Salemba Teknika, Jakarta.