



MODEL LOGISTIK FUZZY DENGAN ADANYA PEMANENAN PROPORSIONAL

Fitri Nor Annisa¹, Muhammad Ahsar Karim^{1a}, Yuni Yulida^{1a*}

¹Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

^aKelompok Keahlian: Matematika Lingkungan dan Industri

*e-mail: y_yulida@ulm.ac.id

ABSTRACT

The logistic growth model with proportional harvesting is a population growth model that takes into account harvesting factors. In real life, not all conditions can be known with certainty, such as different growth rates in each population and harvest rates depending on the needs of the harvester. To overcome these conditions, there is a concept that accommodates the problem of uncertainty, namely the fuzzy concept. This concept can be induced into a logistic model with proportional harvesting which assumes the intrinsic growth rate and the harvest rate is expressed by fuzzy numbers. The purpose of this research is to form a fuzzy logistic model with proportional harvesting, analyze the stability of the model, and form a numerical simulation. This study uses the alpha-cut method to generalize the intrinsic growth rate and harvest rate from crisp numbers to fuzzy numbers, then the Graded Mean Integration Representation (GMIR) method to defuzzify the model, and the linearization method to analyze the stability of the model. The results of this study obtained a logistic model with proportional harvesting. Then the model was developed into a fuzzy logistic model with proportional harvesting by assuming the intrinsic growth rate and the harvest rate expressed by fuzzy numbers. From the model obtained two equilibrium points, namely the first equilibrium point is unstable and the second equilibrium point is asymptotically stable under certain conditions. Model simulation is given to show illustration of stability analysis. From the simulation, it can also be shown that the higher the graded mean value, the lower the population.

Keywords: logistic model, fuzzy, growth rate, harvesting, equilibrium, stability.

ABSTRAK

Model pertumbuhan logistik dengan adanya pemanenan proporsional merupakan model pertumbuhan populasi yang memperhitungkan faktor pemanenan. Dalam kehidupan nyata tidak semua kondisi dapat diketahui secara pasti, seperti laju pertumbuhan yang berbeda pada setiap populasi dan laju panen yang tergantung pada kebutuhan pemanen. Untuk mengatasi kondisi tersebut, terdapat konsep yang mengakomodir masalah ketidakpastian, yaitu konsep *fuzzy*. Konsep ini dapat diinduksi ke dalam model logistik dengan pemanenan proporsional yang mengasumsikan laju pertumbuhan intrinsik dan laju panennya dinyatakan dengan bilangan *fuzzy*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membentuk model logistik *fuzzy* dengan adanya pemanenan proporsional, menganalisis kestabilan model, dan membentuk simulasi numerik. Penelitian ini menggunakan metode *alpha-cut* untuk menggeneralisasi laju pertumbuhan intrinsik dan laju panen dari bilangan tegas (*crisp*) ke dalam bilangan *fuzzy*, kemudian metode *Graded Mean Integration Representation* (GMIR) digunakan untuk proses *defuzzifikasi* model, dan metode linearisasi untuk menganalisis kestabilan model. Hasil dari penelitian ini diperoleh model logistik dengan pemanenan proporsional. Kemudian dari model tersebut dikembangkan menjadi model logistik dengan adanya pemanenan proporsional *fuzzy* dengan mengasumsikan laju pertumbuhan intrinsik dan laju panennya dinyatakan dengan bilangan *fuzzy*. Dari model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan,

yaitu titik kesetimbangan pertama tidak stabil dan titik kesetimbangan kedua stabil asimtotik dengan syarat tertentu. Simulasi model diberikan untuk memperlihatkan ilustrasi terhadap analisa kestabilan. Dari simulasi juga dapat diperlihatkan bahwa semakin besar nilai *graded mean value* maka populasi semakin menurun.

Kata Kunci: model logistik, *fuzzy*, laju pertumbuhan, pemanenan, kesetimbangan, kestabilan.

Received: 2 Juni 2022 Accepted: 21 Juni 2022 Published: 22 Juni 2022

PENDAHULUAN

Kajian di bidang matematika biologi, salah satunya adalah model matematika yang mempelajari masalah laju pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik. Model tersebut mengasumsikan bahwa populasi tumbuh secara logistik, yang berarti daya dukung pertumbuhan populasi memiliki batas. Hal ini dikarenakan oleh terbatasnya sumber daya seperti ruang, makanan, dan kepadatan populasi. Oleh karena itu, model pertumbuhan logistik mempertimbangkan faktor pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth*) dan kapasitas batas (*carrying capacity*). (Rahmi & Panigoro, 2017). Selanjutnya, faktor lain yang dapat mempengaruhi laju pertumbuhan adalah pemanenan (Doust & Saraj, 2015). Hal ini dapat terjadi karena populasi tumbuh dan mulai berinteraksi dengan lingkungan atau predator dari populasi tersebut. Dengan demikian, jika memperhitungkan faktor pemanenan maka model pertumbuhan logistik dapat dikembangkan dengan menambahkan pengaruh pemanenan dalam model pertumbuhannya (Hidayati, 2018), (Nurrobi et al., 2017).

Selanjutnya, sebagian besar peneliti dalam ekologi telah mengembangkan model yang diteliti berdasarkan asumsi bahwa parameter diketahui dengan pasti, namun dalam kehidupan nyata tidak semua kondisi dapat diketahui secara pasti (Paul et al., 2016). Untuk mengatasi kondisi tersebut salah satu konsep yang mengakomodir masalah ketidakpastian adalah dengan konsep *fuzzy*. Dengan demikian, konsep *fuzzy* ini dapat diinduksi ke dalam model logistik dengan pemanenan proporsional yang mengasumsikan laju pertumbuhan intrinsik dan laju panennya dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* (Pal et al., 2012).

Berdasarkan pemaparan di atas, pada penelitian ini akan dikaji bagaimana membentuk model logistik dengan adanya pemanenan proporsional *fuzzy*, kemudian menganalisis kestabilan model dan melakukan simulasi numerik berdasarkan variasi nilai *Graded Mean Value* atau λ -integral value dan berdasarkan analisa kestabilan model.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial biasa orde satu adalah persamaan diferensial yang didalamnya memuat turunan tertinggi yaitu turunan orde satu yang dilambangkan dengan $\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Menurut (Ndii, 2018), (Yulida, 2019) bentuk umum persamaan diferensial biasa orde satu sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

dengan x adalah fungsi tidak diketahui dari t , dan f adalah fungsi dari x . Persamaan (1) disebut persamaan diferensial *autonomous* karena hanya bergantung pada satu variabel x dan fungsi f tidak bergantung secara eksplisit terhadap t .

2. Analisis Kestabilan Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Untuk menganalisis kestabilan model di titik kesetimbangan pada Persamaan (1), dilakukan linearisasi dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan. Menentukan titik kesetimbangan merupakan salah satu langkah terpenting dalam menganalisis model dinamika, sehingga diberikan definisi titik kesetimbangan sebagai berikut.

Definisi 1 (Martcheva, 2015)

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari Persamaan (1) jika $f(\hat{x}) = 0$.

Sebelum melakukan proses linearisasi, diberikan definisi deret Taylor sebagai berikut.

Definisi 2 (Otto & Day, 2007)

Sebagian besar fungsi $f(x)$ dapat direpresentasikan sebagai deret pangkat di sekitar titik $x = a$, diberikan oleh:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots$$

koefisiennya sama dengan

$$b_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i f}{dx^i} \right|_{x=a}$$

dengan $\frac{d^i f}{dx^i}$ adalah turunan ke- i dari $f(x)$ terhadap x dan $i! = 1 \times 2 \times \dots \times i$ (" i faktorial"), dengan $i = 0, 1, 2, \dots$. Koefisien b_i merupakan penaksiran pada $x = a$ dan tidak bergantung pada x . Ini disebut deret Taylor dari fungsi tersebut.

Jika Persamaan (1) didekati secara linear menggunakan deret Taylor, maka diperoleh hasil proses linearisasi sebagai berikut.

$$\frac{dn}{dt} = \lambda n$$

dengan

$$\lambda = f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\hat{x}} \quad (2)$$

Persamaan (2) dinyatakan sebagai nilai dari $f'(x)$ di titik kesetimbangan \hat{x} yang disebut dengan nilai eigen (λ).

Selanjutnya, diberikan teorema kestabilan sebagai berikut.

Teorema 3 (Hale & Kocak, 1991); (Martcheva, 2015)

Diberikan \hat{x} titik kesetimbangan dari persamaan diferensial nonlinear orde satu $\frac{dx}{dt} = f(x)$, dengan f terdeferensial pada \hat{x} .

- a) Jika $f'(\hat{x}) < 0$, maka \hat{x} stabil asimtotik.
 b) Jika $f'(\hat{x}) > 0$, maka \hat{x} tidak stabil.

3. Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi yang mempertimbangkan keterbatasan lingkungan, sehingga laju pertumbuhan populasi tergantung pada kepadatan populasinya. Berdasarkan (Cain & Reynolds, 2010) dan (Yulida & Karim, 2021) model pertumbuhan logistik dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

dengan konstanta a dan K diasumsikan positif dan $K = \frac{r}{a}$.

Selanjutnya, adapun faktor lain yang dapat mempengaruhi laju pertumbuhan adalah pemanenan. Pemanenan dilakukan dengan pengambilan sejumlah populasi per satuan waktu oleh predator yang memanen atau mengkonsumsi sebagian dari sumber daya atau populasi. Menurut (Doust & Saraj, 2015), menjelaskan bahwa model logistik dengan adanya pemanenan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - h$$

dengan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada waktu t , konstanta r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik, K adalah daya dukung (*carrying capacity*), dan h adalah laju pemanenan konstan pada populasi.

4. Himpunan Fuzzy dan Bilangan Fuzzy

Diberikan definisi himpunan fuzzy sebagai berikut.

Definisi 4 (Zadeh, 1965)

Diberikan himpunan tak kosong X , $A \subseteq X$, dan fungsi $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$. Himpunan pasangan terurut $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)): x \in X\}$ disebut himpunan fuzzy A di dalam X , μ_A disebut fungsi keanggotaan dari \tilde{A} dan $\mu_A(x)$ disebut derajat keanggotaan x pada \tilde{A} .

Selanjutnya, menurut (Susilo, 2006), pada umumnya konsep bilangan fuzzy muncul dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam teori fuzzy dalam bentuk besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak pasti. Diberikan definisi bilangan fuzzy dari (Ahmad & Hasan, 2012) sebagai berikut.

Definisi 5

Himpunan fuzzy $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}$ disebut bilangan fuzzy \tilde{a} jika:

- i. \tilde{A} normal: terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.
- ii. \tilde{A} terdukung secara kompak: closure dari $\text{Supp}(\tilde{A})$ terbatas, artinya terdapat bilangan real positif M sedemikian sehingga $\overline{\{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}} \leq M$.
- iii. \tilde{A} semi-kontinu atas: $[\tilde{A}]^\alpha$ tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

- iv. \tilde{A} konveks: untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ada $\lambda \in [0,1]$ sedemikian sehingga berlaku $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$.

Salah satu contoh bilangan fuzzy adalah fungsi keanggotaan trapesium. Menurut (Susilo, 2006), untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dengan $a < b < c < d$, fungsi keanggotaan trapesium dinyatakan sebagai $\mu_{Tra(a,b,c,d)}$ dengan aturan:

$$\mu_{Tra(a,b,c,d)}(x) = F(x: (a, b, c, d)) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; a \leq x < b \\ 1 & ; b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & ; c \leq x < d \\ 0 & ; x \geq d \end{cases} \quad (3)$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Kemudian, menurut (Susilo, 2006), adapun cara lain untuk menyatakan suatu himpunan fuzzy yaitu menggunakan *alpha-cut*. Suatu *alpha-cut* (disingkat dengan $\alpha - cut$) dari himpunan fuzzy \tilde{A} dilambangkan dengan $[\tilde{A}]^\alpha$ dan didefinisikan sebagai:

$$[\tilde{A}]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Jika $[\tilde{A}]^\alpha$ tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, maka \tilde{A} biasa disebut semi-kontinu atas. atau dapat juga ditulis sebagai berikut.

$$[\tilde{A}]^\alpha = [A_\alpha^-; A_\alpha^+] \quad (4)$$

dengan A_α^- dan A_α^+ berturut-turut adalah batas kiri dan batas kanan pada interval tertutup $[\tilde{A}]^\alpha$.

Misalkan \tilde{a} adalah bilangan fuzzy trapesium dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{a}} = \mu_{Tra(a,b,c,d)}$ (Sesuai Persamaan (3)) dan *alpha-cut* (Sesuai Persamaan (4)), untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A_\alpha^- - a}{b - a} \rightarrow A_\alpha^- = \alpha(b - a) + a \\ \alpha &= \frac{d - A_\alpha^+}{d - c} \rightarrow A_\alpha^+ = d - \alpha(d - c) \end{aligned} \quad (5)$$

dengan demikian,

$$[\tilde{A}]^\alpha = [A_\alpha^-; A_\alpha^+] = [(\alpha(b - a) + a); (d - \alpha(d - c))]$$

5. Defuzzifikasi dengan Metode Graded Mean Integration Representation (GMIR)

Menurut (Chen et al., 2006) dan (Chen & Hsieh, 1997), menjelaskan bahwa GMIR dapat digunakan untuk mewakili bilangan fuzzy dan defuzzifikasi masalah fuzzy. Diberikan definisi representasi bilangan fuzzy \tilde{a} berdasarkan nilai integrasi dari Graded Mean Value sebagai berikut.

Definisi 6 (Chen & Hsieh, 1997)

Graded Mean Value atau λ -integral value dari \tilde{a} adalah

$$I_\lambda(\tilde{a}) = \lambda I_R(\tilde{a}) + (1 - \lambda)I_L(\tilde{a}) \quad (6)$$

dimana $I_L(\tilde{a})$ dan $I_R(\tilde{a})$ berturut-turut adalah nilai integral kiri dan kanan, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$I_L(\tilde{a}) = \int_0^1 A_\alpha^- d\alpha \text{ dan } I_R(\tilde{a}) = \int_0^1 A_\alpha^+ d\alpha \quad (7)$$

dengan $\lambda \in [0,1]$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan tahapan membentuk model dengan cara menggeneralisasi laju pertumbuhan intrinsik dan laju panen dari bilangan tegas (*crisp*) ke dalam bilangan *fuzzy*, kemudian dilakukan *defuzzifikasi* model menggunakan metode GMIR, menentukan titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan model di titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen pada model yang sudah di *defuzzifikasi* menggunakan metode linearisasi, dan membentuk simulasi numerik dari model logistik *fuzzy* dengan adanya pemanenan proporsional.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Logistik dengan Adanya Pemanenan Proporsional

Untuk menjelaskan terbentuknya model, diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut.

- (1) Perubahan jumlah populasi dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian individu.
- (2) Laju kelahiran dan kematian populasi per kapita bergantung setidaknya sebagian pada kepadatan populasi, sehingga memungkinkan kematian per kapita akan meningkat secara linear, sedangkan kelahiran per kapita menurun secara linear.
- (3) Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh daya dukung (*carrying capacity*). Daya dukung adalah kemampuan suatu wilayah untuk menampung suatu populasi.
- (4) Populasi akan mengalami pemanenan dengan laju panen konstan. Pemanenan dilakukan dengan pengambilan sejumlah populasi per satuan waktu oleh predator yang memanen atau mengkonsumsi sebagian dari sumber daya atau populasi.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang dibuat, diperoleh model logistik dengan adanya pemanenan proporsional:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - hxy \quad (8)$$

dengan konstanta r dan K diasumsikan positif dan $K = \frac{r}{a}$.

- r : Laju pertumbuhan intrinsik
 x : Kepadatan populasi
 K : Daya dukung
 hx : Laju panen per kapita x oleh y
 y : Kepadatan predator

2. Model Logistik Fuzzy dengan Adanya Pemananen Proporsional

Dalam Persamaan (8), semua parameter diketahui dan memiliki nilai yang pasti, namun dalam kehidupan nyata tidak semua kondisi dapat diketahui secara pasti. Untuk itu, dapat dibentuk model logistik fuzzy dengan adanya pemananen proporsional. Dengan demikian, Persamaan (8) dapat ditulis:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{r}\tilde{x} \left(\tilde{1} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{K}} \right) - \tilde{h}\tilde{x}\tilde{y} \quad (9)$$

dengan $\tilde{r}, \tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{1}, \tilde{K}$ adalah bilangan-bilangan fuzzy.

Bilangan-bilangan fuzzy $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{1}$, dan \tilde{K} memiliki fungsi keanggotaan berupa fungsi karakteristik. Berdasarkan definisi fungsi karakteristik, bilangan-bilangan fuzzy $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{1}$, dan \tilde{K} dapat dinyatakan dengan aturan sebagai berikut.

a) Untuk bilangan fuzzy \tilde{x} , fungsi keanggotaannya adalah

$$\mu_x(z) = \begin{cases} 1, & \text{jika } z \in x \\ 0, & \text{jika } z \notin x \end{cases}$$

b) Untuk bilangan fuzzy \tilde{y} , fungsi keanggotaannya adalah

$$\mu_y(z) = \begin{cases} 1, & \text{jika } z \in y \\ 0, & \text{jika } z \notin y \end{cases}$$

c) Untuk bilangan fuzzy $\tilde{1}$, fungsi keanggotaannya adalah

$$\mu_1(z) = \begin{cases} 1, & \text{jika } z \in 1 \\ 0, & \text{jika } z \notin 1 \end{cases}$$

d) Untuk bilangan fuzzy \tilde{K} , fungsi keanggotaannya adalah

$$\mu_K(z) = \begin{cases} 1, & \text{jika } z \in K \\ 0, & \text{jika } z \notin K \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk laju pertumbuhan intrinsik dan laju panen pada Persamaan (9) dapat dinyatakan dengan fungsi keanggotaan trapesium, berdasarkan Persamaan (3), diperoleh

$$\mu_{Tra(r_1, r_2, r_3, r_4)}(r) = F(r: (r_1, r_2, r_3, r_4)) = \begin{cases} 0 & ; r < r_1 \\ \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} & ; r_1 \leq r < r_2 \\ 1 & ; r_2 \leq r < r_3 \\ \frac{r_4 - r}{r_4 - r_3} & ; r_3 \leq r < r_4 \\ 0 & ; r \geq r_4 \end{cases}$$

$$\mu_{Tra(h_1, h_2, h_3, h_4)}(h) = F(h: (h_1, h_2, h_3, h_4)) = \begin{cases} 0 & ; h < h_1 \\ \frac{h - h_1}{h_2 - h_1} & ; h_1 \leq h < h_2 \\ 1 & ; h_2 \leq h < h_3 \\ \frac{h_4 - h}{h_4 - h_3} & ; h_3 \leq h < h_4 \\ 0 & ; h \geq h_4 \end{cases}$$

Adapun cara lain untuk menyatakan suatu himpunan fuzzy yaitu menggunakan *alpha-cut*, berdasarkan Persamaan (5), diperoleh:

1) Untuk laju pertumbuhan intrinsik fuzzy (\tilde{r}):

i. $\alpha = \frac{r_{\alpha}^- - r_1}{r_2 - r_1} \rightarrow r_{\alpha}^- = \alpha(r_2 - r_1) + r_1$

$$\text{ii. } \alpha = \frac{r_4 - r_\alpha^+}{r_4 - r_3} \rightarrow r_\alpha^+ = r_4 - \alpha(r_4 - r_3) \quad (10)$$

Dengan demikian, *alpha-cut* laju pertumbuhan intrinsik fuzzy (\tilde{r}) adalah

$$[\tilde{r}]^\alpha = [r_\alpha^-; r_\alpha^+] = [(\alpha(r_2 - r_1) + r_1); (r_4 - \alpha(r_4 - r_3))]$$

2) Untuk laju panen fuzzy (\tilde{h}):

$$\text{i. } \alpha = \frac{h_\alpha^- - h_1}{h_2 - h_1} \rightarrow h_\alpha^- = \alpha(h_2 - h_1) + h_1 \quad (11)$$

$$\text{ii. } \alpha = \frac{h_4 - h_\alpha^+}{h_4 - h_3} \rightarrow h_\alpha^+ = h_4 - \alpha(h_4 - h_3)$$

Dengan demikian, *alpha-cut* laju panen fuzzy (\tilde{h}) adalah

$$[\tilde{h}]^\alpha = [h_\alpha^-; h_\alpha^+] = [(\alpha(h_2 - h_1) + h_1); (h_4 - \alpha(h_4 - h_3))]$$

Selanjutnya *alpha-cut* untuk bilangan-bilangan fuzzy \tilde{x} , \tilde{y} , $\tilde{1}$, dan \tilde{K} dapat dinyatakan sebagai berikut.

a) Untuk bilangan fuzzy \tilde{x} , yaitu

$$[\tilde{x}]^\alpha = [x_\alpha^-; x_\alpha^+] = [x; x] = [x]$$

b) Untuk bilangan fuzzy \tilde{y} , yaitu

$$[\tilde{y}]^\alpha = [y_\alpha^-; y_\alpha^+] = [y; y] = [y]$$

c) Untuk bilangan fuzzy $\tilde{1}$, yaitu

$$[\tilde{1}]^\alpha = [1_\alpha^-; 1_\alpha^+] = [1; 1] = [1]$$

d) Untuk bilangan fuzzy \tilde{K} , yaitu

$$[\tilde{K}]^\alpha = [K_\alpha^-; K_\alpha^+] = [K; K] = [K]$$

3. Defuzzifikasi dengan Metode GMIR

Dilakukan *defuzzifikasi* model logistik fuzzy dengan adanya pemanenan proporsional menggunakan metode GMIR. Berdasarkan Persamaan (7) pada Definisi 6, diperoleh:

1) Untuk laju pertumbuhan intrinsik fuzzy (\tilde{r}) dengan *alpha-cut* pada Persamaan (10), diperoleh:

$$I_L(\tilde{r}) = \int_0^1 (\alpha(r_2 - r_1) + r_1) d\alpha = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$I_R(\tilde{r}) = \int_0^1 (r_4 - \alpha(r_4 - r_3)) d\alpha = \frac{r_3 + r_4}{2}$$

2) Untuk laju panen fuzzy (\tilde{h}) dengan *alpha-cut* pada Persamaan (11), diperoleh:

$$I_L(\tilde{h}) = \int_0^1 (\alpha(h_2 - h_1) + h_1) d\alpha = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$I_R(\tilde{h}) = \int_0^1 (h_4 - \alpha(h_4 - h_3)) d\alpha = \frac{h_3 + h_4}{2}$$

Dengan menggunakan Persamaan (6), berdasarkan Definisi 6 diperoleh *graded mean value* dari \tilde{r} dan \tilde{h} sebagai berikut.

(1) Untuk laju pertumbuhan intrinsik fuzzy (\tilde{r}):

$$I_{\lambda}(\tilde{r}) = \lambda \left(\frac{r_3 + r_4}{2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \quad (12)$$

(2) Untuk laju panen fuzzy (\tilde{h}):

$$I_{\lambda}(\tilde{h}) = \lambda \left(\frac{h_3 + h_4}{2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \quad (13)$$

Dari Persamaan (12) dan (13), sehingga Persamaan (9) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = \left[\lambda \left(\frac{r_3 + r_4}{2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \right] x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \left[\lambda \left(\frac{h_3 + h_4}{2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \right] xy$$

atau dapat ditulis

$$\frac{dx}{dt} = I_{\lambda}(\tilde{r})x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - I_{\lambda}(\tilde{h})xy \quad (14)$$

dengan

$$I_{\lambda}(\tilde{r}) = \lambda \left(\frac{r_3 + r_4}{2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \text{ dan } I_{\lambda}(\tilde{h}) = \lambda \left(\frac{h_3 + h_4}{2} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)$$

4. Titik Kesetimbangan dan Analisa Kestabilan Kestabilan

Berdasarkan Definisi 1, diperoleh 2 titik kesetimbangan dari Persamaan (14), yaitu $\hat{x}_1 = 0$ dan $\hat{x}_2 = K \left(1 - \frac{I_{\lambda}(\tilde{h})}{I_{\lambda}(\tilde{r})} \right) y$ dengan syarat $I_{\lambda}(\tilde{r}) > I_{\lambda}(\tilde{h}) y$.

Menurut Teorema 3, Analisa kestabilan model di titik kesetimbangan \hat{x} pada model $\frac{dx}{dt} = f(x)$ dapat diselidiki dari nilai $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ pada saat $x = \hat{x}$. Selanjutnya, pada Persamaan (14), dimisalkan

$$f(x) = I_{\lambda}(\tilde{r})x \left(1 - \frac{x}{K} \right) - I_{\lambda}(\tilde{h})xy$$

Kemudian, turunan pertama dari $f(x)$ terhadap x , yaitu

$$\frac{df(x)}{dx} = I_{\lambda}(\tilde{r}) - \frac{2x}{K} I_{\lambda}(\tilde{r}) - I_{\lambda}(\tilde{h})y$$

Berdasarkan Persamaan (2), nilai eigen merupakan nilai dari $f'(x)$ di titik kesetimbangan \hat{x} . Dalam penelitian ini nilai eigen disimbolkan dengan e , diperoleh sebagai berikut.

$$e = I_{\lambda}(\tilde{r}) - \frac{2x}{K} I_{\lambda}(\tilde{r}) - I_{\lambda}(\tilde{h})y \quad (15)$$

Selanjutnya, menganalisis kestabilan model di titik kesetimbangan dengan ketentuan sebagai berikut.

(1) Pada titik kesetimbangan $\hat{x}_1 = 0$, akan diselidiki kestabilannya melalui nilai eigen pada Persamaan (15), yaitu

$$e_{\hat{x}_1} = I_{\lambda}(\tilde{r}) - I_{\lambda}(\tilde{h})y$$

Jika $I_{\lambda}(\tilde{r}) > I_{\lambda}(\tilde{h})y$, maka nilai eigen bernilai positif artinya $f'(x) > 0$. Berdasarkan Teorema 3, diperoleh titik kesetimbangan tidak stabil.

(2) Pada titik kesetimbangan $\hat{x}_2 = K \left(1 - \frac{I_{\lambda}(\tilde{h})}{I_{\lambda}(\tilde{r})} \right) y$, akan diselidiki kestabilannya melalui nilai eigen pada Persamaan (14), yaitu

$$e_{\hat{x}_2} = f'(x) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=\hat{x}} = \frac{df}{dx} \Big|_{x=K - K \frac{I_\lambda(\tilde{h})}{I_\lambda(\tilde{r})} y} = I_\lambda(\tilde{h})y - I_\lambda(\tilde{r})$$

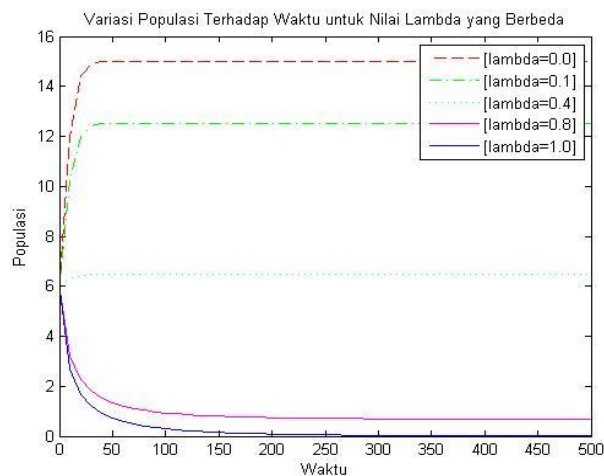
Jika $I_\lambda(\tilde{r}) > I_\lambda(\tilde{h})y$, maka nilai eigen bernilai negatif artinya $f'(x) < 0$. Berdasarkan Teorema 3, diperoleh titik kesetimbangan stabil asimtotik.

5. Simulasi Numerik Model Logistik Fuzzy dengan Adanya Pemanenan Proporsional

Model Logistik Fuzzy dengan Adanya Pemanenan Proporsional pada Persamaan (8) dapat digambarkan dalam bentuk grafik dengan melakukan simulasi numerik sebagai berikut.

5.1 Variasi Populasi Terhadap Waktu untuk Nilai λ yang Berbeda

Diberikan nilai awal $t = 0$, $x(0) = 6$ dan beberapa nilai parameter, yaitu $y = 14$, $\mu_{Tra}(r_1, r_2, r_3, r_4)(r) = \mu_{Tra}(0,5;0,7;0,9;1)(r)$, $\mu_{Tra}(h_1, h_2, h_3, h_4)(h) = \mu_{Tra}(0,02;0,04;0,06;0,08)(h)$, $K = 50$, dan $\lambda \in [0,1]$. Berikut Diperoleh solusi dengan variasi nilai λ yang diberikan, yaitu $\lambda = 0; 0,1; 0,4; 0,8$ dan 1 .



Gambar 1. Variasi Populasi Terhadap Waktu untuk Nilai λ yang Berbeda

Berdasarkan Gambar 1 dapat disimpulkan bahwa jika nilai λ meningkat maka kepadatan populasi secara bertahap menurun.

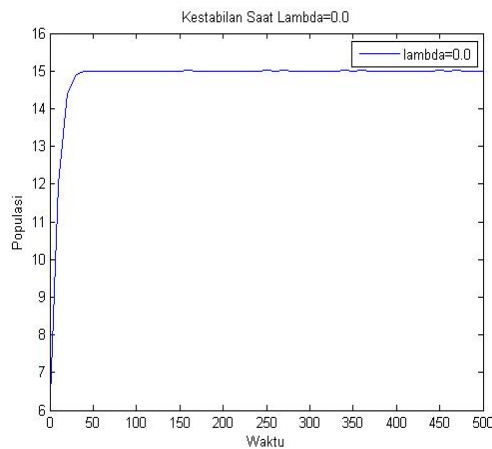
5.2 Titik Kesetimbangan, Nilai Eigen, dan Sifat Stabilitas untuk Nilai λ yang Berbeda

Tabel 1. Titik Kesetimbangan, Nilai Eigen, dan Sifat Stabilitas

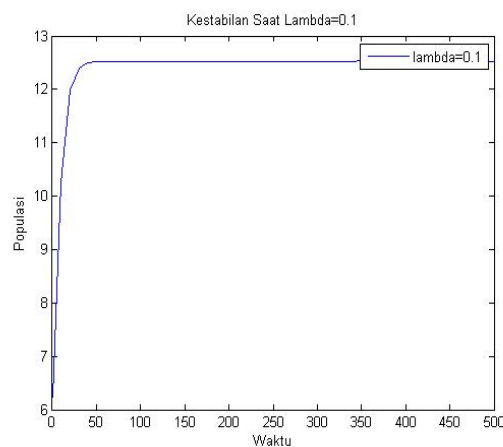
| λ | Titik Kesetimbangan | | Nilai Eigen | | Sifat Stabilitas |
|-----------|---------------------|-------------|-----------------|-----------------|--|
| | \hat{x}_1 | \hat{x}_2 | $e_{\hat{x}_1}$ | $e_{\hat{x}_2}$ | |
| 0 | 0 | 15 | 0,18 | -0,18 | \hat{x}_1 tidak stabil dan \hat{x}_2 stabil |
| 0,1 | 0 | 12,52 | 0,16 | -0,16 | \hat{x}_1 tidak stabil dan \hat{x}_2 stabil |
| 0,4 | 0 | 6,49 | 0,1 | -0,1 | \hat{x}_1 tidak stabil dan \hat{x}_2 stabil |
| 0,8 | 0 | 0,68 | 0,01 | -0,01 | \hat{x}_1 tidak stabil dan \hat{x}_2 stabil |
| 0,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | \hat{x}_1 dan \hat{x}_2 tidak dapat ditentukan |

Tabel 1 merupakan ringkasan analisa kestabilan berdasarkan nilai eigen untuk setiap titik kesetimbangan model dengan nilai λ yang bervariasi. Selanjutnya, diberikan simulai di titik ekuilibrium untuk dengan nilai λ yang bervariasi, seperti pada gambar dibawah ini.

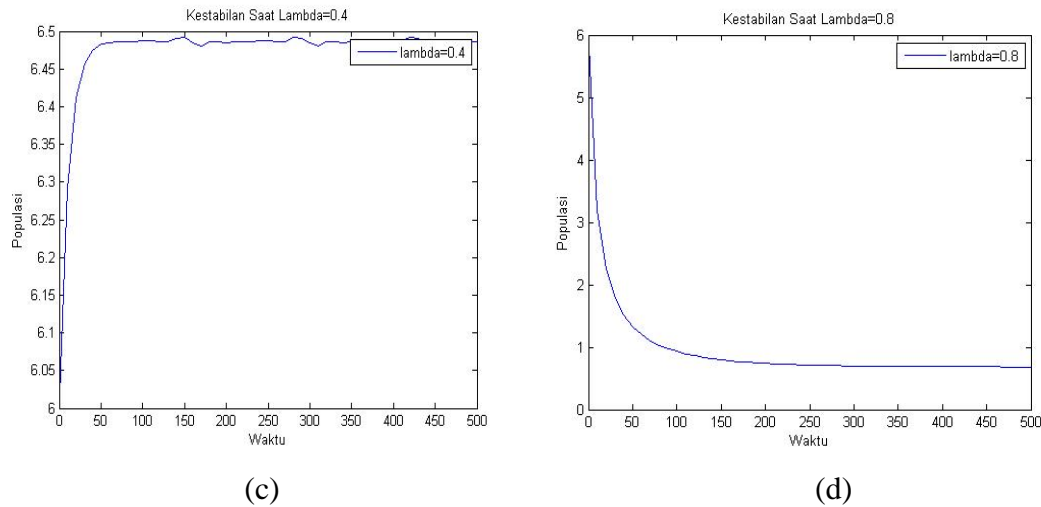
1) Simulasi Analisa Kestabilan di Titik Kesetimbangan \hat{x}_1



(a)



(b)



Gambar 2. Pertumbuhan Populasi Terhadap Waktu di Titik Kesetimbangan $\hat{x}_1 = 0$ berdasarkan variasi nilai λ

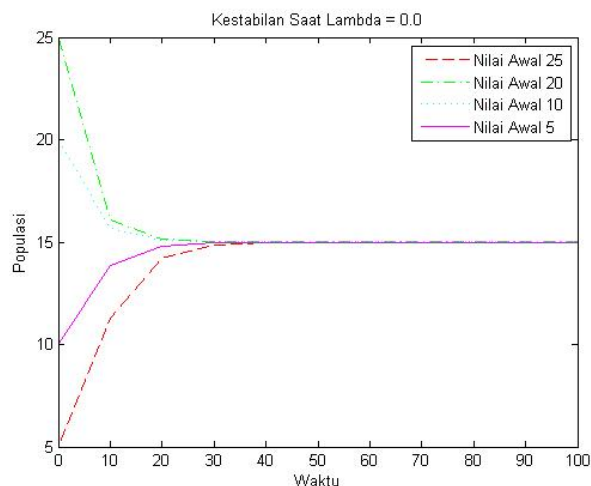
Berdasarkan Gambar 2, populasi saat $\lambda = 0, \lambda = 0,1, \lambda = 0,4,$ dan $\lambda = 0,8,$ berturut-turut disajikan pada Gambar 2(a), 2(b), 2(c), dan 2(d). Dari semua grafik tersebut menunjukkan bahwa populasi tidak menuju ke titik kesetimbangan $\hat{x}_1 = 0$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa, titik kesetimbangan $\hat{x}_1 = 0$ tidak stabil untuk setiap λ yang diberikan.

2) Kestabilan di Titik Kesetimbangan \hat{x}_2

Simulasi pada bagian ini, nilai parameter-parameter yang digunakan diambil dari pada sub bagaian 5.1

a) Untuk $\lambda = 0$

Diambil nilai awal $t = 0, x(0) = 5, x(0) = 10, x(0) = 20,$ dan $x(0) = 25$.

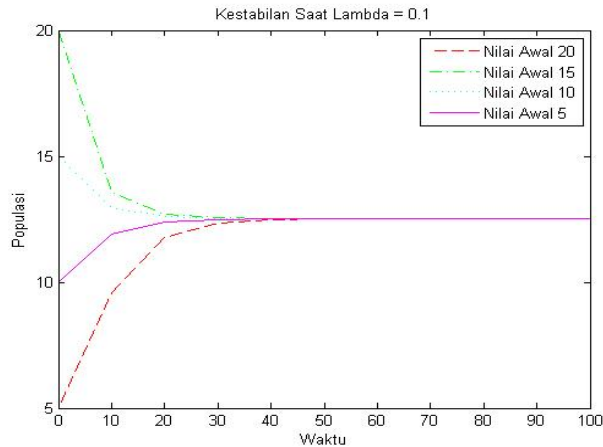


Gambar 3. Pertumbuhan Populasi Terhadap Waktu untuk $\lambda = 0$ di Titik Kesetimbangan $\hat{x}_2 = 15$

Gambar 3 menunjukkan bahwa pada saat nilai awal $x(0) = 5$, $x(0) = 10$, $x(0) = 20$, dan $x(0) = 25$, semua grafik menuju ke titik kesetimbangan $\hat{x}_2 = 15$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 0$, titik kesetimbangannya stabil asimtotik.

b) Untuk $\lambda = 0,1$

Diambil nilai awal $t = 0$, $x(0) = 5$, $x(0) = 10$, $x(0) = 15$, dan $x(0) = 20$, diperoleh

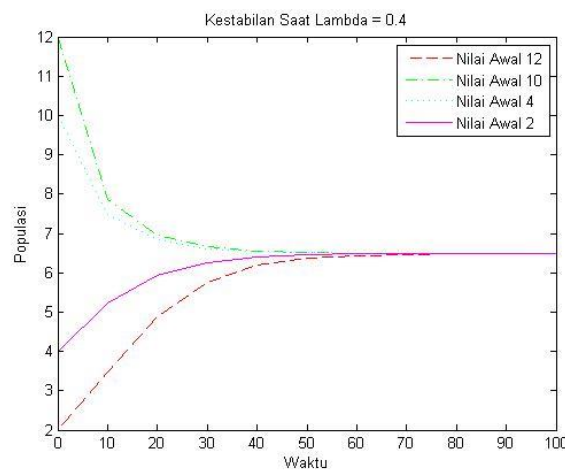


Gambar 4. Pertumbuhan Populasi Terhadap Waktu untuk $\lambda = 0,1$ di Titik Kesetimbangan $\hat{x}_2 = 12,52$

Gambar 4 menunjukkan bahwa pada saat nilai awal $t = 0$, $x(0) = 5$, $x(0) = 10$, $x(0) = 15$, dan $x(0) = 20$, semua grafik menuju ke titik kesetimbangan $\hat{x}_2 = 12,52$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 0,1$, titik kesetimbangan \hat{x}_2 stabil asimtotik.

c) Untuk $\lambda = 0,4$

Diambil nilai awal $t = 0$, $x(0) = 2$, $x(0) = 4$, $x(0) = 10$, dan $x(0) = 12$.

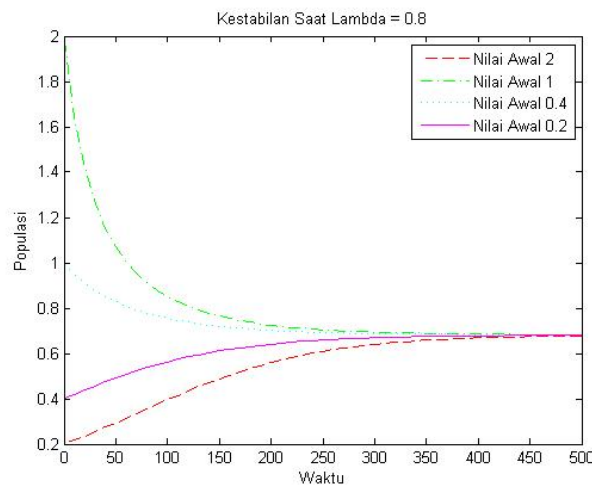


Gambar 5. Pertumbuhan Populasi Terhadap Waktu untuk $\lambda = 0,4$ di Titik Kesetimbangan $\hat{x}_2 = 6,49$

Gambar 5 menunjukkan bahwa pada saat nilai awal $t = 0$, $x(0) = 2$, $x(0) = 4$, $x(0) = 10$, dan $x(0) = 12$, semua grafik menuju ke titik kesetimbangan $\hat{x}_2 = 6,49$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 0,4$, titik kesetimbangannya stabil asimtotik.

d) Untuk $\lambda = 0,8$

Diambil nilai awal $t = 0$, $x(0) = 0,2$, $x(0) = 0,4$, $x(0) = 1$, dan $x(0) = 2$.



Gambar 6. Pertumbuhan Populasi Terhadap Waktu untuk $\lambda = 0,8$ di Titik Kesetimbangan $\hat{x}_2 = 0,68$

Gambar 6 menunjukkan bahwa pada saat nilai awal $t = 0$, $x(0) = 0,2$, $x(0) = 0,4$, $x(0) = 1$, dan $x(0) = 2$, semua grafik menuju ke titik kesetimbangan, yaitu $\hat{x}_2 = 0,68$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 0,8$, titik kesetimbangannya stabil asimtotik.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa model logistik dengan adanya pemanenan proporsional fuzzy mempunyai 2 titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan pertama tidak stabil dan titik kesetimbangan kedua stabil asimtotik dengan syarat tertentu. Dari simulasi juga dapat diperlihatkan bahwa dengan menggunakan nilai parameter λ pada metode GMIR dalam proses defuzzifikasi dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai λ yang digunakan maka akan menyebabkan penurunan terhadap jumlah populasi.

REFERENSI

- Ahmad, M. Z., & Hasan, M. K. (2012). Modeling of Biological Populations Using Fuzzy Differential Equations. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 09, 354–363. <https://doi.org/10.1142/s2010194512005429>
- Cain, J. W., & Reynolds, A. M. (2010). *Ordinary and Partial Differential*

- Equations: An Introduction to Dynamical Systems. Virginia.*
- Chen, S. H., & Hsieh, C. H. (1997). Representation, Ranking, Distance, and Similarity of L-R type fuzzy number and Application. *Australian Journal of Intelligent Processing Systems*, 6(4), 217–229.
- Chen, S. H., Wang, S. T., & Chang, S. M. (2006). Some properties of graded mean integration representation of L-R type fuzzy numbers. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 22(2), 185–208.
- Doust, R. M. H., & Saraj, M. (2015). The logistic modeling population; having harvesting factor. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 25(1), 107–115. <https://doi.org/10.2298/YJOR130515038R>
- Hale, J. K., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, United States of America.
- Hidayati, T. (2018). Kestabilan Model Populasi Mangsa Pemangsa Dengan Laju Pemanenan Tetap. *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 6(1), 38–46.
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, New York.
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Deepublish, Sleman.
- Nurrobi, F., Yulida, Y., & Faisal. (2017). Bifurkasi Pada Model Logistik dengan Faktor Pemanenan Konstan. *Seminar Nasional Matematika Dan Terapannya I Program Studi Matematika FMIPA ULM Banjarbaru*, 36–41.
- Otto, S., & Day, T. (2007). *A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution*. Princeton University Press, New Jersey.
- Pal, D., Mahaptra, G. S., & Samanta, G. P. (2012). A Proportional Harvesting Dynamical Model with Fuzzy Intrinsic Growth Rate and Harvesting Quantity. *Pac Asian J Math*, 6(2), 199–213.
- Paul, S., Mondal, S. P., & Bhattacharya, P. (2016). Discussion on fuzzy quota harvesting model in fuzzy environment: fuzzy differential equation approach. *Modeling Earth Systems and Environment*, 2(2), 1–15. <https://doi.org/10.1007/s40808-016-0113-y>
- Rahmi, E., & Panigoro, H. S. (2017). Pengaruh Pemanenan terhadap Model Verhulst dengan Efek Allee. *SEMIRATA MIPAnet Vol. 1*, 105–112.
- Susilo, F. (2006). *Himpunan & Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Yulida, Y. (2019). *Persamaan Diferensial Biasa*. CV. IRDH, Malang.
- Yulida, Y., & Karim, M. A. (2021). Prediction of rice consumption in South Kalimantan by considering population growth rate. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 758(1). <https://doi.org/10.1088/1755-1315/758/1/012022>
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets*. *Information and Control*, 8, 338–353.