IDEAL MAKSIMAL DAN IDEAL PRIMA *NEAR-RING*

Saman Abdurrahman
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru

ABSTRAK

Penelitian ini membahas ideal near-ring yang meliputi ideal maksimal near-ring dan ideal prima near-ring. Selanjutnya, dipelajari hubungan antara ideal maksimal near-ring dan ideal prima near-ring.

Kata Kunci**:** *Ideal, Ideal Maksimal, Ideal Prima*.

1. PENDAHULUAN

Terdapat struktur yang menyerupai ring. Beda struktur baru tersebut dengan struktur pada ring yaitu sebagai grup aditif tidak harus komutatif dan sifat distributif cukup dipenuhi satu sisi kiri atau kanan. Struktur inilah yang dikenal sekarang dengan nama near-ring.

Contoh, jika $(\Gamma, +)$ grup, maka himpunan $M(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \Gamma | f \ fungsi\}$ merupakan near-ring terhadap operasi penjumlahan + dan komposisi fungsi $\bullet$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a) \text{ dan } (f \bullet g)(a) := f(g(a))$$

untuk setiap $f, g \in M(\Gamma)$ dan $a \in \Gamma$.

Dalam struktur ring dibahas tentang ideal, ideal maksimal, ideal prima dan hubungan antara ideal maksimal dan ideal prima. Fakta ini yang menjadi motivasi ide tulisan ini, selanjutnya akan dikaji ideal near-ring, ideal maksimal near-ring, ideal prima near-ring dan hubungan antara ideal maksimal near-ring dan ideal prima near-ring.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Near-ring

Definisi 2.1.1 [2,3,4]. *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner* + n *dan* $\cdot$ *disebut near-ring jika memenuhi:*

(1). $(R, +)$ *adalah grup* (*tidak harus grup komutatif*)

(2). $(R, \cdot)$ *adalah semigrup*

(3). *untuk setiap* $x, y, z \in R$ *berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri*

a). *distributif kanan* : $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

b). *distributif kiri* : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Suatu near-ring disebut *near-ring kanan* jika memenuhi aksioma (1), (2) dan (3) bagian a) dan disebut *near-ring kiri* jika memenuhi aksioma (1), (2) dan (3) bagian b). Selanjutnya dalam tulisan ini yang dimaksud near-ring adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut.

Near-ring R terhadap operasi biner $+$ dan $\cdot$ dinotasikan dengan $(R, +, \cdot)$, dan untuk setiap $x, y \in R$ yang dioperasikan terhadap operasi $\cdot$ dapat ditulis dengan $x \cdot y$ atau xy.

Secara umum persamaan, $0_R \cdot a = 0_R$ dan $(-a) \cdot b = -ab$ tidak berlaku pada struktur near-ring meskipun berlaku pada struktur ring, sehingga pada struktur near-ring, jika terdapat $0_R \cdot a = 0_R$, maka akan terbentuk klasifikasi near-ring yang lain, sebagaimana disajikan pada definisi berikut.

Definisi 2.1.2 [2]. *Diberikan* $(R, +, \cdot)$ *adalah near-ring. Didefinisikan*

$$R_0 := \{r \in R \mid 0_R \cdot r = 0_R\}.$$

Selanjutnya, R_0 *disebut bagian simetri nol* (*zero-symetric*) *dari near-ring* R.

Definisi 2.1.2[2]. *Diberikan near-ring* R. *Subgrup H di* R *disebut subnear-ring di* R (*ditulis dengan H* $<$ *R*), *jika memenuhi HH*$\subseteq$*H.*

Lemma 2.1.4[2]. *Jika* $(R, +, \cdot)$ *adalah near-ring, maka* $R_0 < R$.

Berikut diberikan klasifikasi near-ring yang lain, selain R_0 sebagai akibat dari persamaan $0_R \cdot a = 0_R$ yang tidak berlaku umum, sebagaimana disajikan pada lemma berikut.

Lemma 2.1.5[2]. *Diberikan* $(R, +, \cdot)$ *adalah near-ring. Jika* $R_c := \{0_R \cdot r \mid r \in R\}$, *maka* R_c *adalah subnear-ring di* R *dan* $xy = y$ *untuk setiap* $x, y \in R_c$

Selanjutnya R_c disebut bagian simetri konstan (*constant-symetric*) dari near-ring R dan $R = R_c$, maka R disebut near-ring konstan.

Definisi 2.1.6[2]. *Diberikan near-ring* $(R, \oplus, \star)$ *dan* $(S, +, \cdot)$. *Suatu pemetaan* $f : R \to S$ *disebut homomorfisma near-ring, jika untuk setiap* $x, y \in R$ *berlaku*

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y) \ dan \ f(x \star y) = f(x) \cdot f(y).$$

Suatu homomorfisma f yang memetakan near-ring R ke near-ring S disebut ***monomorfisma***, jika f adalah satu-satu (*injektif*), disebut ***epimorfisma***, jika f adalah pada (*surjektif*) dan disebut ***isomorfisma***, jika *f* adalah satu-satu dan pada (*bijektif*).

Lemma 2.1.7[2]. *Diberikan near-ring* $(R, \oplus, \star)$ *dan* $(S, +, \cdot)$. *Jika pemetaan* $f : R \to S$ *adalah homomorfisma near-ring, maka*

$$f(0_R) = 0_S \text{ dan } f(-r) = -f(r) \text{ untuk setiap } r \in R.$$

Dalam teori grup, semua subgrup di grup komutatif adalah normal. Mengingat near-ring terhadap operasi pertama tidak harus grup komutatif, maka dalam mendefinisikan ideal di near-ring subgrupnya harus normal, seperti yang disajikan pada definisi berikut.

Definisi 2.1.8[2,4]. *Diberikan* $(R, +, \cdot)$ *adalah near-ring*. *Subgrup* I *di* R *disebut ideal di* R, *jika*

(1). $(I, +)$ *adalah subgrup normal di* $(R, +)$,

(2). $RI \subseteq I$,

(3). $(\forall x, y \in R)(\forall i \in I)$. $(x + i)y - xy \in I$.

Subrup I di R memenuhi kondisi (1) dan (2) disebut *ideal kiri* di R, sedangkan subgrup I di R memenuhi kondisi (1) dan (3) disebut *ideal kanan* di R.

Seperti halnya dalam grup dan ring terdapat istilah grup faktor dan ring faktor, dalam near-ring juga dikenal adanya istilah near-ring faktor.

Lemma 2.1.9[4]. *Diberikan I adalah ideal di near-ring R. Jika $R/I := \{\overline{r} = r + I | r \in R\}$ terhadap operasi $+$ dan $\cdot$, didefinisikan*

$$\overline{r_1} + \overline{r_2} := \overline{r_1 + r_2} \text{ dan } \overline{r_1} \cdot \overline{r_2} := \overline{r_1 \cdot r_2}$$

untuk setiap $\overline{r_1}, \overline{r_2} \in R/I$, maka $(R/I, +, \cdot)$ adalah near-ring.

Lemma 2.1.10[4]. *Diberikan near-ring R. Jika I adalah ideal di R, maka pemetaan kanonik $\pi : R \rightarrow R/I$ adalah epimorfisma near-ring.*

Berikut diberikan sifat dari kernel dari suatu homomorfisma near-ring sebarang yang merupakan suatu ideal

Lemma 2.1.11[4]. *near-ring R dan A. Jika $h : R \rightarrow A$ adalah homomorfisma near-ring, maka Ker(h) adalah ideal di R.*

Seperti halnya dalam grup dan ring terdapat teorema utama homomorfisma grup dan ring, dalam near-ring juga dikenal adanya teorema utama homomorfisma near-ring.

Lemma 2.1.12[4]. *Diberikan near-ring R dan $R^{\star}$. Jika $h : R \rightarrow R^{\star}$ adalah epimorfisma near-ring, maka $R/Ker(h) \cong R^{\star}$.*

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur berupa buku-buku dan jurnal-jurnal ilmiah, khususnya yang berkaitan dengan near-ring, ideal near-ring, ideal malsimal near-ring dan ideal prima near-ring.

Pada tahap awal dipelajari konsep-konsep dasar tentang near-ring, subnear-ring, ideal near-ring, ideal maksimal near-ring dan ideal prima near-ring. Konsep-konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu untuk memahami konstruksi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, ideal near-ring fuzzy, ideal maksimal fuzzy near-ring dan ideal prima fuzzy near-ring

Setelah memahami konstruksi near-ring fuzzy, subnear-ring fuzzy, ideal near-ring, ideal maksimal near-ring dan ideal prima near-ring, dibuktikan beberapa lemma dan teorema yang terkait sehingga diperoleh “hubungan antara ideal di himpunan klasik dan himpunan fuzzynya”.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Near-ring Sederhana (*Simple Near-ring*) dan Ideal Maksimal

Definisi 4.1.1[4]. *Diberikan near-ring R. Near-ring R dikatakan sederhana* (*simple near-ring*), *jika R tidak mempunyai ideal non-trivial.*

Definisi 4.1.2[4]. *Diberikan near-ring R. Jika R adalah near-ring sederhana (simple near-ring), maka untuk setiap homomorfisma dari R ke near-ring sebarang mempunyai bayangan yang isomorfik dengan $\{0_R\}$ atau R.*

Bukti:

Misalkan R adalah near-ring sederhana, yaitu ideal di R hanya $\{0_R\}$ atau R. Akan dibuktikan homomorfisma dari R ke near-ring sebarang mempunyai bayangan yang isomorfik dengan $\{0_R\}$ atau R.

Diambil sebarang sebarang near-ring M, kemudian dibentuk pemetaan homomorfisma $h : R \to M$, sehingga $h : R \to Im(h) \subseteq M$ adalah epimorfisma. Di sisi lain ideal di R hanya $\{0_R\}$ atau R, maka $Ker(h) = \{0_R\}$ atau $Ker(h) = R$ sehingga menurut Lemma 2.1.12, $Im(h) \cong R/\{0_R\} = R$ atau $Im(h) \cong R/R = \{0_R\}$. ■

Definisi 4.1.3[4]. *Diberikan near-ring R. Ideal M di R disebut maksimal, jika $M \neq R$ dan tidak ada ideal I di R sedemikian hingga $M \subseteq I$, dalam arti $M \subseteq I \subseteq R$ maka $M = I$ atau $I = R$.*

Contoh 4.1.4. Jika $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ adalah near-ring, dimana terhadap operasi $\cdot$ didefinisikan, $xy = y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$, maka $\{\overline{0}_{\mathbb{Z}_{12}}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \}$ dan $\{\overline{0}_{\mathbb{Z}_{12}}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \}$ adalah ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{12}$.

Berikut diberikan sifat ideal maksimal di near-ring, yang berhubungan dengan near-ring sederhana.

Lemma 4.1.5[4]. *Ideal M di near-ring R adalah maksimal di R jika dan hanya jika R/M adalah near-ring sederhana.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui M adalah ideal maksimal di R. Akan dibuktikan R/M adalah near-ring sederhana, yaitu ideal di R/M adalah $\{\overline{0_R}\}$ atau R/M.

Misalkan A/M adalah ideal di R/M, maka A ideal di R dan $M \subseteq A$.

Di lain pihak, M adalah ideal maksimal di R, maka haruslah $M = A$ atau $R = A$. Akibatnya, ideal di R/M adalah $A/M = \{\overline{0_R}\}$ atau R/M, dengan kata lain R/M adalah near-ring sederhana.

($\Leftarrow$) Diketahui R/M adalah near-ring sederhana. Akan dibuktikan M adalah ideal maksimal di R.

Misalkan A adalah ideal di R dengan $M \subseteq A \subseteq R$, maka A/M adalah ideal di R/M. Mengingat R/M adalah near-ring sederhana, maka $A/M = \{\overline{0_R}\}$ atau $A/M = R/M$, sehingga $M = A$ atau $R = A$, dengan kata lain M adalah ideal maksimal di R. ■

4.2. Ideal Prima dan Near-ring Prima

Pada bagian ini, diberikan definisi ideal prima, ideal yang dibangun oleh suatu elemen di near-ring, near-ring prima dan beberapa sifat yang terkait dengan ideal prima dan ideal maksimal.

Definisi 4.2.1[4]. *Diberikan near-ring R. Ideal P di R disebut prima, jika untuk setiap ideal I dan J di R, $IJ \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.*

Contoh 4.2.2. Jika R adalah near-ring konstan, maka setiap subgrup normal di $(R,+)$ adalah ideal prima.

Bukti:

Misalkan $(P,+)$ adalah subgrup normal di $(R,+)$. Akan dibuktikan P adalah ideal prima di R.

i) Akan dibuktikan P adalah ideal di R.
   Diberikan sebarang $p \in P$ dan $r, s \in R$, maka
   a) $rp = p \in P$ yang mengakibatkan $RP \subseteq P$.
   b) $(r+p)s - rs = s - s = 0_R \in P$.
   Jadi *P* adalah ideal di R.

ii) Akan dibuktikan untuk setiap ideal *I* dan *J* di R, jika $IJ \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.
   Misalkan *I* dan *J* ideal di R dengan $IJ \subseteq P$, maka $J = IJ \subseteq P$.

Jadi P adalah ideal prima di R. ■

Selanjutnya, diberikan definisi dan sifat ideal di near-ring R, yang dibangkitkan oleh suatu elemen di R.

Definisi 4.2.3[4]. *Diberikan near-ring R dan $a \in R$. Ideal yang dibangkitkan oleh a (dinotasikan dengan $\langle a \rangle$) didefinisikan sebagai irisan dari semua ideal di R yang memuat a.*

Lemma 4.2.4[1]. *Diberikan near-ring R. Jika $\mathcal{N}_a := \{J \mid J \text{ ideal di } R \wedge a \in J\}$ dan $\langle a \rangle = \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$, maka $\langle a \rangle$ adalah ideal terkecil di R yang memuat a dan $\langle a \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ dimana*

$A_{k+1} = A_k^{\star} \cup A_k^{+} \cup A_k^{0} \cup A_k^{++}$, $A_0 = \{a\}$ *dan*

$$A_k^{\star} = \{r + x - r \mid r \in R \wedge x \in A_k\},$$
$$A_k^{+} = \{(r_1 + x)r_2 - r_1 r_2 \mid r_1, r_2 \in R \wedge x \in A_k\},$$
$$A_k^{0} = \{x - y \mid x, y \in A_k\},$$
$$A_k^{++} = \{rx \mid r \in R \wedge x \in A_k\}.$$

Bukti:

Misalkan $\mathcal{N}_a := \{J \mid J \text{ ideal di } R \wedge a \in J\}$ dan $\langle a \rangle = \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$.

Akan dibuktikan $\langle a \rangle$ adalah ideal terkecil di R yang memuat a dan $\langle a \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

Setiap J adalah ideal di R, maka $0_R \in J$ yang mengakibatkan,

$$0_R \in \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J \text{ sehingga } \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J \neq \emptyset.$$

Diambil sebarang $x, y \in R$ dan $z, w \in \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$, maka $z, w \in J$ untuk setiap $J \in \mathcal{N}_a$.

Mengingat, sebarang J adalah ideal di R maka

a) $(J,+)$ subgrup di $(R,+)$, sehingga $z - w \in J$,
b) $(J,+)$ subgrup normal di $(R,+)$, sehingga $x + z - x \in J$,
c) $RJ \subseteq J$, sehingga $xz \in J$ dan
d) $(x+z)y - xy \in J$.

Berdasarkan hasil di atas, maka:

a) $z - w \in \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$, sehingga $(\bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J, +)$ subgrup di $(R,+)$,
b) $x + z - x \in \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$, sehingga $(\bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J, +)$ subgrup normal di $(R,+)$,

c) $xz \in \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$, sehingga $R \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J \subseteq \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$ dan
d) $(x+z)y - xy \in \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$.

Jadi, $\langle a \rangle = \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$ adalah ideal di R.
Selanjutnya, akan dibuktikan $\langle a \rangle$ adalah terkecil di R yang memuat a.
Diambil sebarang ideal *I* di R yang memuat *a*. Akan dibuktikan $\langle a \rangle \subseteq I$.
Mengingat *I* adalah ideal di R yang memuat a, maka $I \in \mathcal{N}_a$ sehingga $\langle a \rangle = \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J \subseteq I$.
Jadi, $\langle a \rangle = \bigcap_{J \in \mathcal{N}_a} J$ adalah ideal terkecil di R yang memuat a dan jelas bahwa $\langle a \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. ■

Berikut diberikan sifat yang ekuivalen dari ideal prima di near-ring R.

Lemma 4.2.5[4]. *Diberikan P adalah ideal di near-ring R. Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen,*
(1) *P adalah ideal prima.*
(2) *untuk setiap ideal I dan J di R, jika $\langle IJ \rangle \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.*
(3) *untuk setiap $a, b \in R$, jika $a \notin P$ dan $b \notin P$ maka $\langle a \rangle \langle b \rangle \nsubseteq P$.*
(4) *untuk setiap ideal I dan J di R, jika $I \supsetneq P$ dan $J \supsetneq P$ maka $IJ \nsubseteq P$.*
(5) *untuk setiap ideal I dan J di R, jika $I \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$ maka $IJ \nsubseteq P$.*

Bukti:
$(1) \Rightarrow (2)$ Misalkan *I* dan *J* ideal di R sedemikian hingga $\langle IJ \rangle \subseteq P$. Akan dibuktikan $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.
Menurut definisi $\langle IJ \rangle$, $IJ \subseteq \langle IJ \rangle$ sehingga $IJ \subseteq P$. Mengingat *P* adalah ideal prima, maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.
$(2) \Rightarrow (1)$ Misalkan *I* dan *J* ideal di R sedemikian hingga $IJ \subseteq P$. Akan dibuktikan *P* adalah ideal prima, dalam arti $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.
Mengingat $\langle IJ \rangle$ adalah ideal terkecil yang memuat *IJ* dan *P* ideal yang memuat *IJ*, maka $\langle IJ \rangle \subseteq P$, sehingga menurut yang diketahui, jika $\langle IJ \rangle \subseteq P$ maka $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$.
$(1) \Leftrightarrow (5)$ Jelas dari Definisi 4.2.1.
$(1) \Rightarrow (3)$ Misalkan $a, b \in R$ sedemikian hingga $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq P$. Akan dibuktikan $a \in P$ atau $b \in P$.
Menurut yang diketahui *P* ideal prima di R dan $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq P$, maka $\langle a \rangle \subseteq P$ atau $\langle b \rangle \subseteq P$ yang mengakibatkan $a \in P$ atau $b \in P$.
$(3) \Rightarrow (4)$ Misalkan *I* dan *J* ideal di R sedemikian hingga $I \supsetneq P$ dan $J \supsetneq P$. Akan dibuktikan $IJ \nsubseteq P$.
Diambil sebarang $a \in I - P$ dan $b \in J - P$, maka $a, b \notin P$, $\langle a \rangle \subseteq I$ dan $\langle b \rangle \subseteq J$, sehingga menurut yang diketahui, jika $a \notin P$ dan $b \notin P$ maka $\langle a \rangle \langle b \rangle \nsubseteq P$ yang mengakibatkan $IJ \nsubseteq P$.
$(4) \Rightarrow (5)$ Misalkan *I* dan *J* ideal di R sedemikian hingga $I \nsubseteq P$ dan $J \nsubseteq P$. Akan dibuktikan $IJ \nsubseteq P$.
Diambil sebarang $a \in I - P$ dan $b \in J - P$, maka $a, b \notin P$, $\langle a \rangle \subseteq I$ dan $\langle b \rangle \subseteq J$. Mengingat $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ ideal di R, maka $\{0_R\} \subseteq \langle a \rangle$ dan $\{0_R\} \subseteq \langle b \rangle$ sehingga untuk setiap $c \in P$ dapat dinyatakan dengan $c = 0_R + c$ yang mengakibatkan $\langle a \rangle + P \supsetneq P$

dan $\langle b\rangle + P \supseteq P$, sehingga menurut yang diketahui berlaku $(\langle a\rangle + P)(\langle b\rangle + P) \nsubseteq P$. Berdasarkan hasil di atas, maka ada $a^\star \in \langle a\rangle$, $b^\star \in \langle b\rangle$ dan $p, p^\star \in P$ sedemikian hingga $(a^\star + p)(b^\star + p^\star) \notin P$.

$$\begin{aligned}(a^\star + p)(b^\star + p^\star) &= (a^\star + p)b^\star + (a^\star + p)p^\star \\ &= \underbrace{(a^\star + p)b^\star + a^\star b^\star}_{\in P} - \underbrace{a^\star b^\star}_{\notin P} + \underbrace{(a^\star + p)p^\star}_{\in P} \notin P.\end{aligned}$$

Mengingat $a^\star b^\star \notin P$ dan $a^\star b^\star \in \langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq IJ$, maka $IJ \nsubseteq P$. ■

Berikut diberikan sifat dari ideal prima yang berhubungan dengan epimorfisma kanonik (*canonical epimorphism*).

Lemma 4.2.6[4]. *Diberikan I dan P adalah ideal di near-ring R. Jika $I \subseteq P$ dan $\pi : R \to R/I = \overline{R}$ adalah epimorfisma kanonik (canonical epimorphism), maka P adalah prima jika dan hanya jika $\pi(P)$ adalah prima.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui P adalah prima di R. Akan dibuktikan $\pi(P)$ adalah prima di R/I. Diambil sebarang $\overline{x}, \overline{y} \in R/I$ dengan $\langle \overline{x}\rangle\langle \overline{y}\rangle \subseteq \pi(P)$, maka $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y} \in \pi(P)$. Mengingat π adalah epimorfisma kanonik, maka $xy \in P$. Menurut yang diketahui P adalah prima di R, maka $x \in P$ atau $y \in P$ sehingga $\pi(x) = \overline{x} \in \pi(P)$ atau $\pi(y) = \overline{y} \in \pi(P)$ yang mengakibatkan $\pi(P)$ adalah prima di R/I.

($\Leftarrow$) Diketahui $\pi(P)$ ideal prima di R/I. Akan dibuktikan P ideal prima di R. Diambil sebarang $x, y \in R$ dengan $\langle x\rangle\langle y\rangle \subseteq P$, maka $xy \in P$ sehingga $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \in \pi(P)$.

Mengingat $\pi(P)$ adalah ideal prima di R/I, maka $\pi(x) \in \pi(P)$ atau $\pi(y) \in \pi(P)$ sehingga $x \in P$ atau $y \in P$ yang mengakibatkan P ideal prima di R. ■

Seperti halnya pada ring dikenal istilah ring prima, pada near-ring juga dikenal istilah near-ring prima yang pendefinisiannya serupa dengan ring prima yaitu sebagai berikut.

Definisi 4.2.7[4]. *Diberikan adalah near-ring R. Near-ring R disebut near-ring prima jika $\{0_R\}$ adalah ideal prima di R.*

Contoh 4.2.8. Jika $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ adalah near-ring, dimana terhadap operasi $\cdot$ didefinisikan, $xy = y$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_3$, maka $\mathbb{Z}_3$ adalah near-ring prima.

Bukti:

Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}_3$ dengan $\langle x\rangle\langle y\rangle \subseteq \{0_{\mathbb{Z}_3}\}$, maka $xy \in \{0_{\mathbb{Z}_3}\}$. Mengingat $xy = y$, maka $y \in \{0_{\mathbb{Z}_3}\}$ sehingga $\{0_{\mathbb{Z}_3}\}$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}_3$, yang mengakibatkan $\mathbb{Z}_3$ adalah near-ring prima.

Selanjutnya diberikan sifat yang menunjukkan hubungan antara near-ring sederhana dan near-ring prima.

Lemma 4.2.9[4]. *Jika R adalah near-ring sederhana, maka R adalah near-ring prima atau near-ring nol.*
Bukti:
Misalkan R adalah near-ring sederhana dan $R \neq \{0_R\}$. Akan dibuktikan R adalah near-ring prima, yaitu $\{0_R\}$ adalah ideal prima di R.
Diambil sebarang $x, y \in R$ dengan $x \notin \{0_R\}$ dan $y \notin \{0_R\}$, maka $x \neq 0_R$ dan $y \neq 0_R$, sehingga $\langle x \rangle$ dan $\langle y \rangle$ adalah ideal tidak nol di R. Mengingat R adalah near-ring sederhana, maka $\langle x \rangle = R$ dan $\langle y \rangle = R$. Akibatnya $\langle x \rangle \langle y \rangle = RR \nsubseteq \{0_R\}$, sehingga menurut Lemma 4.2.5 bagian 3, $\{0_R\}$ adalah ideal prima, dengan kata lain R adalah near-ring prima. ■

Berikut diberikan sifat yang menunjukkan hubungan antara near-ring konstan dan near-ring prima.

Lemma 4.2.10[4]. *Jika R adalah near-ring konstan, maka R adalah near-ring prima.*
Bukti:
Misalkan R adalah near-ring konstan $(R = R_c)$. Akan dibuktikan R adalah near-ring prima, yaitu $\{0_R\}$ adalah ideal prima di R.
Diambil sebarang $x, y \in R_c$ dengan $\langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq \{0_R\}$, maka $xy \in \{0_R\}$. Mengingat $xy = y$, maka $y \in \{0_R\}$ sehingga $\{0_R\}$ adalah ideal prima di R. ■

Selanjutnya diberikan sifat yang menunjukkan hubungan antara ideal prima dengan near-ring faktor.

Lemma 4.2.11[4]. *Diberikan near-ring R. Ideal I adalah prima di R jika dan hanya jika R/I adalah near-ring prima.*
Bukti:
($\Rightarrow$) Misalkan I adalah ideal prima di R. Akan dibuktikan R/I adalah near-ring prima, yaitu $\{\overline{0_R}\}$ adalah ideal prima di R/I.
Diambil sebarang $x + I$, $y + I \in R/I$ dengan $\langle x + I \rangle \langle y + I \rangle \subseteq \{\overline{0_R}\}$, maka $(x + I)(y + I) \in \{\overline{0_R}\}$ sehingga $(x + I)(y + I) = xy + I = 0_R + I \Leftrightarrow xy \in I$.
Mengingat I adalah ideal prima di R, maka $x \in I$ atau $y \in I$ yang mengakibatkan $x + I = 0_R + I$ atau $y + I = 0_R + I$, sehingga $x + I \in \{\overline{0_R}\}$ atau $y + I \in \{\overline{0_R}\}$.
Jadi $\{\overline{0_R}\}$ adalah ideal prima, dengan kata lain R/I adalah near-ring prima.
($\Leftarrow$) Misalkan R/I adalah near-ring prima dalam arti $\{\overline{0_R}\}$ adalah ideal prima di R/I. Akan dibuktikan I adalah ideal prima di R.
Diambil sebarang $x, y \in R$ dengan $\langle x \rangle \langle y \rangle \subseteq I$, maka $xy \in I$ sehingga $xy + I$ = $(x + I)(y + I) = 0_R + I$ yang mengakibatkan $(x + I)(y + I) \in \{\overline{0_R}\}$.
Mengingat $\{\overline{0_R}\}$ adalah ideal prima di R/I, maka $x + I \in \{\overline{0_R}\}$ atau $y + I \in \{\overline{0_R}\}$. Akibatnya, $x + I = 0_R + I$ atau $y + I = 0_R + I$, sehingga $x \in I$ atau $y \in I$, dengan kata lain I adalah ideal prima di R. ■

Berikut diberikan sifat yang menunjukkan hubungan antara ideal maksimal dan ideal prima pada near-ring.

Lemma 4.2.12[4]. *Diberikan near-ring R. Jika I adalah ideal maksimal di R, maka I adalah ideal prima atau $R^2 \subseteq I$.*

Bukti:

Misalkan *I* ideal maksimal di R. Akan dibuktikan *I* adalah ideal prima di R atau $R^2 \subseteq I$.

Mengingat *I* ideal maksimal di R, maka menurut Lemma 4.1.5, R/I adalah near-ring sederhana, sehingga menurut Lemma 4.2.1, R/I adalah near-ring prima atau near-ring nol $R/I = \{\overline{0_R}\}$. Selanjutnya, jika R/I adalah near-ring prima, maka menurut Lemma 4.2.12, *I* adalah ideal prima di R **atau** jika $R/I = \{\overline{0_R}\}$ maka $\{r + I | r \in R\} = \{0_R + I\} = \{I\}$, sehingga $R^2 \subseteq R \subseteq I$. ■

Secara umum kebalikan Lemma 4.2.12 tidak berlaku, karena ada $\{0_{\mathbb{Z}}\}$ adalah ideal prima di near-ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, tetapi $\{0_{\mathbb{Z}}\}$ bukan ideal maksimal di $\mathbb{Z}$, karena ada $2\mathbb{Z}$ ideal di $\mathbb{Z}$, dimana $\{0_{\mathbb{Z}}\} \subseteq 2\mathbb{Z}$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat diambil kesimpulan bahwa setiap ideal maksimal di near-ring adalah prima.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bh. Satyanarayana, & Kuncham. S.P. 2005. "Fuzzy prime ideal of gamma near-ring", *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 31, no. 1, pp. 121-129.

[2]. Clay. J.R. 1992. *Nearrings, Geneses, and Applications.* Oxford, New York.

[3]. Kandasamy. W.B.V. 2002. *Smarandache Near-Rings*, American Research Press Rehoboth.

[4]. Pilz, G. 1983. *Near-Ring, The Theory, and Applications*. 2nd ed., North-Holland Mathematict Studies, vol. 23, North-Holland, Amsterdam.