Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol. 4 No.2 Desember 2010: 38 - 50

KETERKENDALIAN SISTEM LINIER DIFERENSIAL BIASA *TIME-VARYING* DAN SISTEM LINIER DIFERENSIAL PARSIAL DENGAN PENDEKATAN MODUL ATAS OPERATOR DIFERENSIAL

Na'imah Hijriati
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru

ABSTRAK

Misalkan $D = K[d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n]$ operator diferensial linier dengan koefisien di K, yang memenuhi $\forall\ a \in K$; $d_i a = a d_i + \partial_i a$. D adalah ring operator diferensial linier dengan sifat antara lain: D tidak memuat pembagi nol, tidak komutatif, dan untuk setiap $d_i, d_j \in D$, $i, j = 1, \ldots, n$ dan untuk setiap $a, b \in K$ berlaku $a d_i (b d_j) = ab d_i d_j + a(\partial_i b) d_j$.

Misalkan M adalah suatu modul atas D yang dibentuk dari suatu sistem linier diferensial biasa (OD) *time-varying* atau sistem linier diferensial parsial (PD) terkendali. Hubungan antara sistem OD atau PD linier dengan modul M atas D adalah sistem OD atau PD linier jika dan hanya jika M modul atas D yang ditentukan oleh persamaannya merupakan modul bebas torsi. Oleh karena itu untuk menunjukkan suatu sistem OD atau PD linier cukup ditunjukkan modul yang dibentuk oleh persamaannya merupakan bebas torsi, yang dinyatakan dalam suatu tes formal untuk menunjukkan suatu modul atas D merupakan bebas torsi. dan jika dihubungakan dengan keparameteran suatu operator diferensial linier adalah sistem kendali PD linier terkendali jika dan hanya jika *parametrizable*.

Kata Kunci: *Keterkendalian, Parameterisasi, Modul Atas Operator Diferensial, Integrabilitas Formal, Teori Kendali.*

1. PEDAHULUAN

Sistem kendali dengan koefisien didalam suatu lapangan dikatakan berbentuk Kalman, jika sistem kendali tersebut dapat dituliskan sebagai $\dot{x} = Ax + Bu$ dengan $x = (x_1,..., x_n)$ vektor state, $u = (u_1,..., x_p)$ vektor input, $y = (y_1,..., y_m)$ vektor output, A matriks koefisien berukuran $n \times n$, B matriks koefisien berukuran $n \times p$, dan maksimum ranknya adalah p.

Misalkan D ring operator diferensial linier atas suatu lapangan dan $\gamma = \{y_k \mid k = 1,2,\ldots,m\}$ indeterminates diferensial, maka $D\gamma = Dy_1 + Dy_2 + \cdots + Dy_m$ adalah modul kiri atas D yang dibangun oleh himpunan γ. Jika $\mathcal{R}$ himpunan berhingga sistem persamaan OD atau PD linier dan dibentuk modul $[\mathcal{R}]$ atas D yang dibangun berhingga dari diferensial linier yang merupakan konsekwensi dari sistem generator, maka dapat dibentuk modul $M = [\gamma]/[\mathcal{R}]$ atas D.

Elemen M disebut terobservasi jika suatu kombinasi linier dari variabel sistem dan derivatifnya memenuhi persamaan dari sistem kendali dan sistem terkendali jika setiap elemen yang terobservasi bebas.

Hal ini mengakibatkan keterkendalian suatu sistem linier diferensial biasa atau sistem linier diferensial parsial sangat bergantung pada sistem kendalinya, dimana dalam tulisan ini sistem kendali yang digunakan adalah sistem Kalman.

Akan tetapi untuk menunjukkan suatu sistem terkendali, tidaklah mudah terutama sistem linier diferensial parsial. Oleh karena itu penelitian ini mempelajari tentang beberapa sifat dari operator diferensial, beberapa sifat dari operator diferensial linier dan keterkendalian sistem operator diferensial liner dengan menggunakan pendekatan modul atas operator diferensial.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Teori Modul

Berikut diberikan definisi modul kiri atas suatu ring sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 [1]

Misalkan R sebarang ring dengan elemen satuan. Modul kiri M atas R adalah suatu grup abelian M yang dilengkapi dengan pemetaan pergandaan skalar :

$$. : R \times M \rightarrow M \text{ , } (a,m) \mapsto am$$

yang memenuhi aksioma – aksioma berikut :

i. $a(m + n) = am + an$
ii. $(a + b)m = am + bm$
iii. $(ab)m = a(bm)$
iv. $1m = m$

untuk setiap $m,n \in M$ dan $a,b,1 \in R$.

Selanjutnya dalam penelitian ini modul kiri dituliskan hanya dengan modul dan ring dengan elemen satuan hanya dituliskan dengan ring.

Misalkan R ring dan M modul atas R. $N \subseteq M$ disebut submodul dari M jika N membentuk modul atas R terhadap operasi penjumlahan dan operasi pergandaan skalar yang berlaku di M. Akibatnya diperoleh definisi berikut:

Definisi 2.1.2 [2]

Misalkan M modul atas ring R. $N \subseteq M$ disebut ***Submodul*** *dari M, jika*:

1. *N subgrup dari grup abelian M*
2. *untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $n \in N$, berlaku $rn \in N$*

Misalkan M modul atas ring R dan misalkan N submodul dari M, maka N subgrup dari grup abelian M, akibatnya N adalah subgrup normal, sehingga didapat dibentuk grup faktor M/N dengan $M/N = \{\overline{m} = m + N \mid m \in M\}$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi pergandaan skalar pada grup abelian M/N sebagai berikut :

$$+ : M/N \times M/N \rightarrow M/N \text{ , } (\overline{m}_1, \overline{m}_2) \mapsto \overline{m_1 + m_2}$$

$$. : R \times M/N \rightarrow M/N \text{ , } (a, \overline{m}) \mapsto \overline{am}$$

untuk setiap $a \in R$ dan untuk setiap $\overline{m}, \overline{m}_1, \overline{m}_2 \in M/N$. Akibatnya diperoleh teorema berikut:

Teorema 2.1.3 [1]

Jika M modul atas ring R dan N submodul dari M, maka M/N modul atas R terhadap operari pergandaan skalar diatas.

Berikut didefinisikan modul bebas torsi beserta sifat-sifatnya:

Definisi 2.1.4 [1]
Misalkan R daerah intergral, dan M modul atas R. Elemen $x \in M$ diebut elemen torsi jika terdapat $a \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga $ax = 0$. Selanjutnya himpunan semua elemen torsi di M dituliskan dengan M_T. Jika $M_T = \{0\}$, maka M disebut modul bebas torsi dan jika $M_T = M$ maka M disebut modul torsi.

Teorema 2.1.5 [1]
Jika R daerah integral dan misalkan M modul atas R, maka
1. *M_T adalah submodul dari M*
2. *M/M_T adalah modul bebas torsi*

Bukti:
1. $M_T \neq \emptyset$, karena $\{0\} \in M_T$. Ambil sebarang $x,y \in M_T$, maka ada $a,b \in R$ dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ax = 0$ dan $by = 0$
   Diketahui R daerah integral maka $ab \neq 0$, sehingga
   $ab(x-y) = (ab)x - (ab)y = (ax)b - a(by) = 0$. Jadi $x - y \in M_T$.
   Selanjutnya untuk sebarang $c \in R$ dengan $c \neq 0$ maka $ca \neq 0$. Misalkan $d = ca$, sehingga $dx = (ca)x = c(ax) = 0$. Jadi M_T tetutup terhadap operasi pergandaan skalar. Terbukti M_T submodul M.
2. Ambil sebarang $\overline{m} \in M/M_T$ dengan $\overline{m} = a + M_T$ dan sebarang $r \in R$ dengan $r \neq 0$, sedemikian sehingga $r\overline{m} = r(a + M_T) = ra + M_T = \overline{0} = M_T$, maka $ra \in M_T$, sehingga terdapat $b \in R$, $b \neq 0$, sehingga $b(ra) = 0$.
   karena $(br)a = b(ra) = 0$ dan R daerah integral maka $a \in M_T$,

akibatnya $\overline{m} = M_T = \overline{0}$. Jadi M/M_T modul bebas torsi. ■

2.2. Diferensial Manifold

Salah satu contoh dari ruang topologi adalah diferensial manifold. Berikut ini beberapa definisi yang mendasari pendefinisian diferensial manifold.

Definisi 2.2.1 [3]
Misalkan M ruang topologi berdimensi n, U himpuna terbuka di M yang memuat $p \in M$ dan $\mu : U \to V$ homeomorfisma untuk himpuanan terbuka $V \subseteq \mathbb{R}^n$, maka (U, μ) disebut chart berdimensi n di p, U disebut koordinat persekitaran dan μ disebut koordinat pemetaan.

Definisi 2.2.2 [3]
Misalkan M ruang topologi berdimensi n, U himpuna terbuka di M yang memuat $p \in M$ dan $\mu : U \to V$ homeomorfisma untuk himpuanan terbuka $V \subseteq \mathbb{R}^n$
Diberikan fungsi koordinat natural $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan $\pi_i(x) = x_i$ dimana $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jika π_i fungsi koordinat natural atas $\mu(U)$, maka fungsi $\mu_i = \pi_i \circ \mu : U \to \mathbb{R}$ disebut fungsi koordinat lokal.

Definisi 2.2.3 [3]
Misalkan M ruang topologi dan $\{(U_\alpha, \mu_\alpha)\}$ *himpunan chart berdimensi n.* $\{(U_\alpha, \mu_\alpha)\}$ *disebut* ***atlas*** *jika* $\{U_\alpha\}$ *mengcovering M.*

Definisi 2.2.4 [3]
Ruang Housdorff dengan atlas disebut dengan ruang Euclid lokal atau topologi manifold.

Definisi 2.2.5 [4]
Misalkan M manifold. M disebut berdimensi n jika setiap chart (U, μ) berdimensi *n.*

Definisi 2.2.6 [4]
Misalkan V himpunan terbuka di $\mathbb{R}^n$ *dan misalkan* $f : V \to \mathbb{R}$ *fungsi bernilai real. f dikatakan* $\boldsymbol{C^k}$ *untuk* $k \in \mathbb{Z}^+$, *jika derivatif-derivatif* $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ *ada dan kontinu. Selanjutnya jika k =* ∞, *maka f dikatakan* C^∞ *atau smooth.*

Definisi 2.2.7 [4]
Misalkan M ruang Housdorff. M disebut C^k *manifold jika M ruang Euclid lokal dengan coutable basis dan atlas yang memenuhi sifat:*

1. *jika* (U, μ) *dan* (V, ν) *dua chart dengan* $U \cap V \neq \emptyset$ *maka* $\nu \circ \mu^{-1}$ *adalah* C^k *pada* $\mu(U \cap V)$ *dan* $\mu \circ \nu^{-1}$ *adalah* C^k *pada* $\nu(U \cap V)$.
2. *jika* (W, ξ) *mempunyai sifat* (1) *untuk setiap chart di atlas, maka* (W, ξ) *juga di atlas.*

Selanjutnya $\nu \circ \mu^{-1}$ dan $\mu \circ \nu^{-1}$ disebut koordinat transformasi. Chart yang mempunyai sifat (1) disebut C^k-releted atau C^k-compatible. Atlas dengan sifat (1) disebut C^k-atlas dan C^k-atlas dengan sifat (2) disebut maksimal.

Berdasarkan definisi-definisi di atas, didefinisikan differensial manifold sebagai berikut:

Definisi 2.2.8 [4]
Misalkan M topologi manifold berdimensi m. M disebut diferensial manifold, jika C^k*-atlas adalah maksimal.*

Selanjutnya diberikan beberapa definisi yang berlaku pada diferensial manifold.

Definisi 2.2.9 [4]
Misalkan M dan N dua diferensial manifold dan $\phi : M \to N$ *fungsi kontinu.*
Jika (U, μ) *chart di* $p \in M$ *dan* (V, ν) *chart di* $\phi(p) \in N$ *maka* $\nu \circ \phi \circ \mu^{-1}$ *disebut* ***koordinat ekspresi*** *dari* ϕ *pada U.*

Definisi 2.2.10 [4]
Misalkan M dan N dua smooth manifold dan $\phi : M \to N$ *fungsi kontinu. Jika koordinat ekspresi dari* ϕ *adalah smooth, maka* ϕ *disebut differentiable*.

Selanjutnya secara khusus, fungsi $f : U \to \mathbb{R}$ *differentiable* di *p*, jika $f \circ \mu^{-1}$ differentiable di $\mu^{-1}(p)$.

Definisi 2.2.11 [4]
Misalkan M dan N dua C^k-manifold. Jika $\phi : M \to N$ *fungsi injektif, surjektif,* ϕ *dan* ϕ^{-1} *adalah C^k maka* ϕ *disebut C^k-difeomorfisma.*

Selanjutnya diberikan teorema tentang rank di differentiable manifold sebagai berikut:

Teorema 2.2.12 [4]
Misalkan M dan N adalah diferensial manifold yang masing-masing berdimensi m dan n, dan $\phi : M \to N$ *differentiable. Syarat perlu dan syarat cukup* ϕ *mempunyai rank r dipersekitaran* $p \in M$ *adalah jika terdapat chart* (U, μ) *di* $p \in M$ *dan chart* (V, ν) *di* $\phi(p) \in N$ *sedemikian sehingga*:

$$\nu_i \circ \phi = \mu_i \text{ untuk } i = 1,2,\ldots,r$$

$$\nu_j \circ \phi = 0 \text{ untuk } j = r+1,\ldots,n$$

pada $\phi^{-1}(V) \bigcap U$. Akibatnya jika $q \in \phi^{-1}(V) \bigcap U$ dan $\mu(q) = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, maka $\hat{\phi} = \nu \circ \phi \circ \mu^{-1} : (a_1, a_2, \ldots, a_m) \to (a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$.

Definisi 2.4.13 [4]
Misalkan M dan N adalah differentiable manifold yang masing-masing berdimensi m dan n dan $\phi : M \to N$. ϕ *disebut subermation jika rank* ϕ *= dim N*

Berdasarkan Teorema 2.2.12, syarat perlu dan syarat cukup agar ϕ subermation adalah:
Jika (V, ν) adalah sebarang chart di $\phi(p)$ dan (W, ξ) sebarang chart di *p*, maka terdapat chart (U, μ) di p dengan $\mu_i = \nu_i \circ \phi$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$ dan $\mu_j = \xi_j$ untuk $j = n+1,\ldots,m$.

2.3. Vektor Bundle

Berikut beberapa definisi yang mendasari pendefinisian vektor bundle.

Definisi 2.3.1 [4]
Misalkan M dan E dua manifold dan $\pi : E \to M$ *fungsi surjektif. E disebut trivial lokal jika setiap* $x \in M$, terdapat persekitaran *U* dan difeomorfisma

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F \to U \times F,\ p \mapsto \varphi(p) = (\pi(p), \phi(p))$$

untuk suatu $p \in \pi^{-1}(U)$ *dan untuk suatu manifold F dan untuk suatu pemetaan diferensial* $\phi : \pi^{-1}(U) \to F$.

Selanjutnya (U, φ) disebut lokal trivialization dari *E* atas *U*, *F* disebut fiber dan $\pi^{-1}(x)$ disebut fiber di *x*.

Berdasarkan definisi-definisi dan teorema-teorema di atas, selanjutnya didefinisikan vektor bundle.

Definisi 2.3.2 [4]
Misalkan M adalah smooth manifold dan misalkan E manifold dengan smooth subermasion $\pi : E \to M$ *yang surjektif. E disebut vektor bundle dengan rank n atas M, jika*:

1. *terdapat ruang vektor V berdemensi n, sedemikian sehingga untuk sebarang* $p \in M$, fiber $E_p = \pi^{-1}(p)$ *dari* π *atas p adalah ruang vektor yang isomorfik dengan V*
2. *untuk sebarang* $p \in M$, *terdapat persekitaran U, sedemikian sehingga terdapat difeomorfisma*
$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F,\ p \mapsto \Phi(p) = (\pi(p), \phi(p))$$
untuk $p \in \pi^{-1}(U)$ *dan untuk suatu manifold F = V dan suatu pemetaan diferensial* $\phi : \pi^{-1}(U) \to F$.
3. $\phi_U\big|_{E_P} : E_P \to V$ *isomorfisma atas ruang vektor* dan $\Phi_U(\pi^{-1}(p)) = (p, \phi(\pi^{-1}(p)))$.

Selanjutnya *V* disebut **typcle fiber**, Φ_U disebut **lokal travialization *E* atas *U***, *U* disebut **persekitaran travilization** untuk *E*.

Berdasarkan Definisi 2.3.2, diperoleh definisi berikut:

Definisi 2.3.3 [4]
Misalkan μ *pemetaan smooth dari B ke E yang memenuhi* $(\pi \circ \mu)(x) = x$, *untuk setiap* $x \in B$, *maka* μ *disebut* ***section*** *dari E. Jika* μ *hanya didefinisikan atas persekitaran di B, maka* μ *disebut* ***lokal section***.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ring operator differential

Lapangan diferensial *K*, dengan *n* derivatif $\partial_1, \ldots \partial_n$ adalah suatu lapangan yang memenuhi:

$\forall\, a,b \in K,\ \forall\, i,j = 1, \ldots n$

i. $\partial_i a \in K$

ii. $\partial_i(a+b) = \partial_i a + \partial_i b$

iii. $\partial_i(ab) = (\partial_i a)b + a(\partial_i b)$

iv. $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$.

dalam tulisan ini, K diasumsikan sebagai lapangan diferensial yang memuat Q.

Misalkan $D = K[d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n]$ operator diferensial linier dengan koefisien di K, yang memenuhi $\forall\ a \in K$; $d_i a = a d_i + \partial_i a$.

Setiap elemen-elemen di D, berbentuk $\sum_{0 \le |\mu| < \infty} a_\mu d_\mu$, dengan $a^\mu \in K$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, $d_\mu = d_1^{\mu_1} d_2^{\mu_2} \ldots d_n^{\mu_n}$.

Ring operator diferensial memilki sifat-sifat sebagai berikut:

Sifat 3.1.1

Untuk setiap $d_i, d_j \in D$, $i, j = 1, \ldots, n$ *dan untuk setiap* $a, b \in K$ *berlaku* $a d_i (b d_j) = a b d_i d_j + a(\partial_i b) d_j$.

Sifat 3.1.2

Ring operator diferensial linier D tidak memuat pembagi nol dan tidak komutatif.

3.2. Keterkendalian

Misalkan $\gamma = \{ y_k \mid k = 1, \ldots, m\}$ indeterminates diferensial $D\gamma = Dy_1 + \ldots + Dy_m$ adalah modul kiri atas D yang dibangun oleh himpunan γ, dan setiap elemen di $D\gamma$ berbentuk $\sum_{\substack{0 \le |\mu| < \infty \\ 1 \le k \le m}} (a_\mu)_k d_\mu y_k$.

$D\gamma$ dapat dituliskan dengan $[\gamma] = [y_1, \ldots, y_m]$

Misalkan $\mathcal{R}$ himpunan berhingga sistem persamaan OD atau PD linier (ODE atau PDE), dibentuk modul kiri $[\mathcal{R}]$ atas D yang dibangun berhingga dari diferensial linier yang merupakan konsekwensi dari sistem generator

$M = [\gamma]/ [\mathrm{R}]$ adalah residual diferensial modul atas D.

Selanjutnya didefinisikan keterobservasian pada elemen M.

Definisi 3.2.1

suatu elemen di M dikatakan terobservasi (observable) jika suatu kombinasi linier dari variabel sistem dan derivatifnya memenuhi persamaan dari sistem kendali.

Berdasarkan definisi observasi terdapat dua kemungkinan, yaitu suatu observasi dapat ditunjukkan oleh persamaan PD atau OD itu sendiri atau tidak. observasi yang tidak bisa ditunjukkan oleh persamaan OD atau PD itu sendiri disebut bebas. Sehingga diperoleh definisi keterkendalian berikut ini:

Definisi 3.2.2

Suatu sistem dikatakan terkendali jika setiap elemen yang terobservasi adalah bebas.

Selanjutnya berdasarkan definisi elemen torsi dan Definisi 3.2.2 diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.2.3
Sistem OD atau PD linier terkendali jika dan hanya jika modul M atas D ditentukan oleh persamaannya adalah bebas torsi.
Bukti:
$\Rightarrow$
Diketahui sistem OD atau PD linier terkendali dan $M = [\gamma]/[\mathcal{R}]$ modul kiri atas D.
Akan dibuktikan M modul bebas torsi
Ambil sebarang elemen torsi $m \in M$, dengan $m = a + [\mathcal{R}]$ untuk $a \in [\gamma]$, maka terdapat $d \in D$, $d \neq O$ (O elemen netral di D) sedemikian sehingga $dm = 0 = [\mathrm{R}]$.
Karena diketahui sistem tekendali dan $dm = [\mathcal{R}]$, maka dm elemen yang terobservasi.
Disisi lain $dm = d(a + [\mathcal{R}]) = da + [\mathcal{R}]$, sehingga $da + [\mathcal{R}] = [\mathcal{R}] \Rightarrow da \in [\mathcal{R}]$.
Andaikan $a \in [\gamma]$ dan $a \notin [\mathcal{R}]$.
Jika $a \in [\gamma]$ maka $da \in [\gamma]$, sehingga terdapat $a' \in [\gamma]$ sedemikian sehigga $da = a'$, akibatnya terdapat elemen di $[\gamma]$, yang dapat dibangun oleh $[\mathrm{R}]$. Atau dengan kata lain dm elemen terobsevasi yang tidak bebas. Hal ini kontradikasi dengan bahwa sistem terkendali.
Jadi pengandaian salah haruslah $a \in [\mathcal{R}]$.
Akibatnya $m = a + [\mathcal{R}] = [\mathcal{R}]$.
Jadi elemen torsi M adalah $\{[\mathcal{R}]\}$, atau dengan kata lain M adalah modul bebas torsi.
$\Leftarrow$
diketahui M modul bebas torsi
akan dibuktikan sistem OD atau PD linier terkendali.
Diketahui M modul bebas torsi maka elemen torsi dari M hanya 0.
karena $M = [y]/ [\mathcal{R}]$ maka himpunan semua elemen torsi dari M adalah $\{[\mathcal{R}]\}$. Akibatnya setiap elemen yang terobservasi adalah bebas sehingga sistem OD atau PD terkendali. ∎

3.3. Operator Diferensial linier

Misalkan $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ operator PD linier, dengan F_0, F_1 adalah dua vector bundle di manifold X yang berdimensi n, dengan koordinat lokal $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dengan kata lain $\mathcal{D}_1$ adalah operator PD linier yang bekerja pada section F_0, yaitu bekerja pada fungsi $\eta : X \rightarrow F_0$. Didefinisikan solusi dari aturan pengaitan $\mathcal{D}_1 : F_0 \rightarrow F_1$ sebagai berikut $\eta \in F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1\eta = 0$.

Ide utama dari tulisan ini adalah menghubungkan setiap operator $\mathcal{D}_1 : \eta \rightarrow \zeta$ dari modul M atas $D = [\eta]/[\mathcal{D}_1\eta]$ dan di katakan bahwa operator $\mathcal{D}_1$ menentukan modul M atas D.

Definisi 3.3.1
Misalkan $\mathcal{D}_1$ operator differensial parsial linier, maka:
1. *operator $\mathcal{D}_1$ disebut formally injektive jika* $\mathcal{D}_1\eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$

2. *operator $\mathcal{D}_1$ disebut formally surjective jika terdiferensial secara independen, yaitu jika $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$ tidak mempunyai kondisi kompetibel atau dengan kata lain tidak terdapat operator $\mathcal{D}_2$, sedemikian sehingga jika $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$ maka $\mathcal{D}_2\zeta = 0$.*

Berikut ini definisi dari eksak lokal:

Definisi 3.3.2
Misalkan $[\mathcal{D}_i,\ i = 0, \ldots, l]$ barisan operator differensial linier. $[\mathcal{D}_i,\ i = 0, \ldots, l]$ disebut eksak lokal jika ker $\mathcal{D}_{i+1}$ = im $\mathcal{D}_i$ *untuk* $\forall\ i = 0, \ldots, l$.

Akibatnya diperoleh sifat berikut:

Sifat 3.3.3
Misalkan $[\mathcal{D}_i,\ i = 0,\ldots,l]$ barisan operator differensial linier. Jika $[\mathcal{D}_i, i = 0,\ldots,l]$ eksak lokal maka $\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$ untuk setiap $i = 0,\ldots,l$.
Bukti:
Diketahui $[\mathcal{D}_i,\ i = 0, \ldots, l]$ eksak lokal
Akan ditunjukkan $\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$
Misalkan $\mathcal{D}_i : F_{i-1} \to F_i$ dan $\mathcal{D}_{i+1} : F_i \to F_{i+1}$, untuk $i = 0,\ldots,l$
Diketahui $[\mathcal{D}_i,\ i = 0, \ldots, l]$ eksak lokal, maka ker $\mathcal{D}_{i+1}$ = im $\mathcal{D}_i$
Ambil sebarang $x \in F_{i-1}$, maka

$$(\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i)(x) = \mathcal{D}_{i+1}(\mathcal{D}_i(x)) = \mathcal{D}_{i+1}(y) \qquad \text{untuk } y \in \text{im } \mathcal{D}_i$$

karena ker $\mathcal{D}_{i+1}$ = im $\mathcal{D}_i$ untuk setiap $i = 0,\ldots,l$, maka $\mathcal{D}_{i+1}(y) = 0$ untuk $y \in$ im $\mathcal{D}_i$
Jadi $\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$ untuk setiap $i = 0,\ldots,l$. ■

Selanjutnya didefinisikan eksak formal sebagai berikut:

Definisi 3.3.4
Misalkan $[\mathcal{D}_i,\ i = 0, \ldots, l]$ barisan operator differensial linier. Barisan $[\mathcal{D}_i,\ i = 0, \ldots, l]$ disebut eksak formal (*formally exact*) jika setiap operator membangun semua kondisi kompetibel dari operator sebelumnya.

Berdasarkan Definisi 3.3.4 diperoleh sifat berikut:

Sifat 3.3.5
Misalkan $\mathcal{D}$ operator differensial linier, maka:

1. Jika barisan differensial $0 \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ adalah eksak formal maka operator $\mathcal{D}$ disebut injektif
2. Jika barisan differensial $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \to 0$ adalah eksak formal maka operator $\mathcal{D}$ disebut surjektif

Bukti: :

1. diketahui $0 \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ adalah eksak formal
   Akan dibuktikan $\mathcal{D}$ injektif.
   Bukti :
   Misalkan $\mathcal{D}'$ operator differensial dari 0 ke E, karena diketahui $0 \xrightarrow{\mathcal{D}} E \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$ eksak formal, maka operator $\mathcal{D}$ membangun semua kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}'$ atau dengan kata lain $\mathcal{D}'0 = e \Rightarrow \mathcal{D}e = 0$, untuk $e \in E$.
   Ambil sebarang x dan $y \in E$, misalkan $\mathcal{D}x = \mathcal{D}y$ maka
   $\mathcal{D}x = \mathcal{D}y \Leftrightarrow \mathcal{D}x - \mathcal{D}y = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}(x - y) = 0 \Rightarrow \mathcal{D}(x - y) = 0$ adalah kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}'0 = x - y$. Karena $\mathcal{D}'0 = 0$, akibatnya $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
   Jadi terbukti $\mathcal{D}$ injektif.
2. diketahui $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \to 0$ adalah eksak formal
   Akan dibuktikan $\mathcal{D}$ surjektif
   Misalkan $\mathcal{D}'$ operator differensial dari F ke 0, karena diketahui $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ eksak formal, maka operator $\mathcal{D}'$ membangun semua kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}$ atau dengan kata lain $\mathcal{D}e = f \Rightarrow \mathcal{D}'f = 0$, untuk $e \in E$ dan $f \in F$.
   Ambil sebarang $f \in F$, karena $\mathcal{D}'g = 0$ untuk setiap $g \in F$, maka $\mathcal{D}'f = 0$ akibatnya terdapat $e \in E$ sedemikian sehingaa $\mathcal{D}e = f \Rightarrow \mathcal{D}'f = 0$.
   Jadi terbukti $\mathcal{D}$ surjektif. ■

Sistem diferensial linier yang dibahas pada penelitian ini adalah sistem yang terintegral secara formal dengan involutive simbol, yaitu barisan dimulai dengan $\mathcal{D}_1$ dan setiap operator medeskripsikan secara tepat kondisi kompetibel dari kondisi yang terdahulu dan berhenti ketika lebih dari $n + 1$ operator, dimana n adalah dimensi dari X. Barisan

$$F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} F_{n+1} \to 0$$

adalah formally eksak dan barisan ini biasanya disebut barisan Janet dari $\mathcal{D}_1$

Berikut adalah definisi dari formal adjoint dari suatu operator dan parameter dari suatu operator:

Definisi 3.3.6

Misalkan $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ *operator diferensial linier dengan adjoint formalnya* $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \to \tilde{F}_0$ *. Didefinisikan aturan formal yang ekivalen dengan integration dari masing-masing bagian sebagai berikut* :

1. *matriks adjoint (zero order operator) adalah matriks transposenya*
2. *adjoint dari* ∂_i *adalah* - ∂_i
3. *dua operator linier PD, yaitu P, Q yang dapat dikomposisikan, maka*
   $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$.

Definisi 3.3.7

Misalkan $\mathcal{D}_1 : F_1 \to F_0$ operator diferensial linier. $\mathcal{D}_1$ disebut parameterizable jika terdapat himpunan fungsi pengubah $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ yang disebut dengan potentials dan operator linier $\mathcal{D}_0$ sedemikian sehingga semua kondisi kompetibel dari sistem yang inhomogenous $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ dibangun tepat oleh $\mathcal{D}_1\eta = 0$, yaitu jika barisan $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \to 0$ formal eksak.

3.4. Tes Formal Modul Bebas Torsi

Misalkan $D = K[d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n]$ operator diferensial linier dengan koefisien di K, yang memuat $\mathbb{Q}$ dan misalkan M adalah modul kiri atas D.

Berdasarkan Teorema 3.2.3 tentang hubungan antara keterkendalian dengan modul bebas torsi, maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.4.1

Operator diferensial $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan module bebas torsi M atas D, jika terdapat operator $\mathcal{D}_0 : E \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1$ membangun kondisi kompetibel $\mathcal{D}_0$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.2.3 diketahui M modul bebas torsi atas D jika dan hanya jika sistem terkendali. Karena M ditentukan oleh operator $\mathcal{D}_1$ maka sistem yang didefinisikan oleh $\mathcal{D}_1$ terkendali jika terdapat $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1\eta = 0$. ■

Akibat Teorema 3.4.1, maka diperoleh formal tes untuk menunjukkan apakah operator $\mathcal{D}_1$ menentukan modul M bebas torsi atas D atau tidak sebagai berikut:

Tes formal modul bebas torsi

1. diawali dengan $\mathcal{D}_1$.
2. konstruksikan adjointnya yaitu $\tilde{\mathcal{D}}_1$.
3. cari kondisi kompetibel dari $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$. Dan nyatakan operator ini sebagai $\tilde{\mathcal{D}}_0$.
4. konstruksikan adjointnya yaitu $\mathcal{D}_0 (= \tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_0)$
5. cari kondisi yang sesuai dari $\mathcal{D}_0\xi = \eta$. Dan nyatakan operator ini sebagai $\mathcal{D}_1$'

Tes formal di atas menghasilkan dua kasus yaitu :

1. Jika operator $\mathcal{D}_1$ adalah kondisi kompetibel $\mathcal{D}_1$' dari $\mathcal{D}_0$ yang tepat maka operator $\mathcal{D}_1$ menentukan modul M atas D bebas torsi dan $\mathcal{D}_0$ merupakan parameterisasi dari $\mathcal{D}_1$.
2. Jika operator $\mathcal{D}_1$ diantara kondisi kompetible dari $\mathcal{D}_0$ (tetapi kurang tepat), maka elemen torsi M adalah semua kondisi kompetibel modulo persamaan $\mathcal{D}_1\eta = 0$ yang baru.

Bukti:
Misalkan operator $\tilde{\mathcal{D}}_0$ membangunkan kondisi kompetibel dengan tepat dari operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$, maka $\tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0$. Karena $0 = \tilde{\mathcal{D}}_0 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \widetilde{\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{D}_1}$ maka $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0 = 0$. Akibatnya $\mathcal{D}_1$ berada diantara kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}_0$. Misalkan kondisi kompetibel $\mathcal{D}_0$ dibangun oleh operator $\mathcal{D}_1$'.

- Jika $\mathcal{D}_1$ dengan tepat berada diantara kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}_0$, maka setiap satu kondisi kompetibel yang baru ζ' di $\mathcal{D}_1$' adalah konsekuensi diferensial dari $\mathcal{D}_1$ dan karena $\mathcal{D}_1 \eta = 0$ maka dapat ditemukan operator $q \in D$ sedemikian sehingga $q\zeta' = 0$. Akibatnya setiap satu kondisi kompetibel yang baru dari $\mathcal{D}_0$ menentukan elemen torsi.
- Jika $\mathcal{D}_1$ mendeskripsikan kondisi kompetibel dengan tepat dari $\mathcal{D}_0$, yaitu barisan $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ formal eksak, maka berdasarkan Definisi 3.3.7 $M \subseteq D\xi$. Karena $D\xi$ modul bebas, maka M atas D ditentukan oleh $\mathcal{D}_1$ module bebas torsi atas D.

Selanjutnya tes di atas dapat disajikan dengan menggunakan barisan diferensial dimana indeks angka menyatakan langkah yang berbeda:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 5 & \\
 & & & \xrightarrow{\mathcal{D}_{1'}} & F_1' \\
E & \xrightarrow{\mathcal{D}_0} & F_0 & \xrightarrow{\mathcal{D}_1} & F_1 \\
 & 4 & & 1 & \\
\tilde{E} & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_0} & \tilde{F}_0 & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} & \tilde{F}_1 \\
 & 3 & & 2 &
\end{array}
$$

Pada barisan yang terdahulu, hanya barisan dual dan barisan yang dibentuk dengan $\mathcal{D}_1$' dan $\mathcal{D}_0$ yang formal eksak. Sehingga akibat dari keterkendalian operator $\mathcal{D}_1$ bisa terlihat sebagai akibat dari keeksakan formal dari barisan yang dibentuk oleh $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_0$.

Pada tulisan ini, diasumsikan operator terkendali natural (terobservasi) jika dan hanya jika formal adjointnya terobservasi (terkendali)

Berdasarkan Teorema 3.2.3 dan Definisi 3.3.7, maka diperoleh teorema yang berikut:

Teorema 3.4.2
Sistem kendali PD linier terkendali jika dan hanya jika parametrizable.
Bukti:
Operator $\mathcal{D}_1$ terkendali jika dan hanya jika $\mathcal{D}_1$ menentukan module bebas torsi atas D. Berdasarkan Teorema 3.4.1, $\mathcal{D}_1$ menentukan D-module bebas torsi jika dan hanya jika terdapat operator $\mathcal{D}_0 : E \to F_0$ yang memparameterisasi $\mathcal{D}_1$, yaitu barisan $E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1$ formal eksak. ■

Akibat tes formal modul bebas torsi, maka diperoleh cara menghitung elemen torsi jika $\mathcal{D}_1$ tidak menentukan module bebas torsi M atas D, sebagai berikut :

1. hitung $\mathcal{D}_1$' dan cek apakah $\mathcal{D}_1$ berada dengan tepat diantara $\mathcal{D}_1$'
2. untuk sebarang satu kondisi kompetibel baru $\mathcal{D}_1'\eta = \zeta'$ dari $\mathcal{D}_1$', hitung kondisi kompetibel berdasarkan sistem:

$$\mathcal{D}_1'\eta = 0$$

$$\mathcal{D}_1'\eta = \zeta' \text{ (hanya satu persamaan)}$$

3. akibatnya diperoleh ζ' element torsi dari M yang memenuhi $q\zeta' = 0$, $0 \neq q \in D$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Ring operator diferensial linier D tidak memuat pembagi nol, tidak komutatif dan Untuk setiap $d_i, d_j \in D,\ i, j = 1, \ldots, n$ dan untuk setiap $a, b \in K$ berlaku $ad_i(bd_j) = abd_i d_j + a(\partial_i b)d_j$.
2. Hubungan antara keterkendalian suatu sistem OD atau PD linier dengan modul yang dibentuk dari persamaan OD atau PD tersebut adalah Sistem OD atau PD linier terkendali jika dan hanya jika modul M atas D ditentukan oleh persamaannya adalah bebas torsi dan jika dihubungkan dengan keparameteran suatu operator diferensial linier adalah sistem kendali PD linier terkendali jika dan hanya jika *parametrizable*.
3. Tes formal modul bebas torsi adalah: (1) diawali dengan $\mathcal{D}_1$; (2) konstruksikan adjointnya yaitu $\tilde{\mathcal{D}}_1$; (3) cari kondisi kompetibel dari $\tilde{\mathcal{D}}_1\lambda = \mu$. Dan nyatakan operator ini sebagai $\tilde{\mathcal{D}}_0$; (4) konstruksikan adjointnya yaitu $\mathcal{D}_0$ (= $\tilde{\tilde{\mathcal{D}}}_0$); (5) cari kondisi yang sesuai dari $\mathcal{D}_0\xi = \eta$. Dan nyatakan operator ini sebagai $\mathcal{D}_1$'. Sedangkan untuk menentukan elemen torsi jika operator tidak menentukan module bebas torsi M atas D, sebagai berikut : (1) hitung $\mathcal{D}_1$' dan cek apakah $\mathcal{D}_1$ berada dengan tepat diantara $\mathcal{D}_1$'; (2) untuk sebarang satu kondisi kompetibel baru $\mathcal{D}_1'\eta = \zeta'$ dari $\mathcal{D}_1$', hitung kondisi kompetibel berdasarkan sistem: $\mathcal{D}_1'\eta = 0$ dan $\mathcal{D}_1'\eta = \zeta'$ (hanya satu persamaan), (3) akibatnya diperoleh ζ' element torsi dari M yang memenuhi $q\zeta' = 0$, $0 \neq q \in D$..

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Adkins, A.W., & Weintraub, S.H., 1992, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.

[2]. Hartley, B., & Hawkes, T.O., 1994, *Rings, Modules and Linier Algebra*, Chapman-Hall, London.

[3]. Wasserman, R.H., 1992, *Tensor and Manifolds: With Application to Phisics*, Oxford University Press Inc, New York.

[4]. Bishop, R.L., & Goldberg, S.I., 1980, *Tensor Analysis on Manifold*, Dover Publication Inc, New York.

[5]. Pommaret, J.F., & Quadrat, A., 1998, *Applicable Algebra in Engineering, Comunication and Computing: Generalized Bezout Identity*, volume 9, 91-116, Springer-Verlag.