



ANALISIS KESTABILAN DAN SOLUSI NUMERIK PADA MODEL SEIR UNTUK PENYAKIT TUBERKULOSIS

Azkiia Khairal Jamil¹, Yuni Yulida², Muhammad Ahsar Karim³

^{1, 2, 3}Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email: azkiakhairal@gmail.com

ABSTRACT

One of the infectious diseases that can be modelled into the SEIR model is Tuberculosis (TB), this is because TB has a bacterial incubation period, so it is at this time that a person enters the exposed subpopulation. TB is divided into two types, namely latent TB and active TB. This study aims to explain the formation of the SEIR Model for the Spread of Tuberculosis, determine the equilibrium point and Basic Reproductive Numbers on the SEIR Model for the Spread of Tuberculosis, analyze the stability of the SEIR Model for the spread of Tuberculosis at the equilibrium point, and make numerical simulations. The result of this research is the formation of a mathematical model on the spread of Tuberculosis, and from the model obtained two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Then the basic reproduction number (\mathcal{R}_0) was found through the Next Generation Matrix. Furthermore, the stability analysis was carried out at the disease-free equilibrium point and it was found that the local asymptotic stable model with $\mathcal{R}_0 < 1$, while at the endemic equilibrium point it was found that the local asymptotic stable model with $\mathcal{R}_0 > 1$. Numerical simulations are presented to show numerical solutions and strengthen the explanation of the stability analysis of the model using the fourth-order Runge-Kutta method with parameters that meet the stability requirements.

Keywords: Tuberculosis, SEIR Model, Equilibrium, Stability analysis, Numerical simulation.

ABSTRAK

Salah satu penyakit menular yang dapat dimodelkan ke dalam model SEIR adalah penyakit Tuberculosis (TB), hal ini dikarenakan TB memiliki masa inkubasi bakteri, sehingga pada masa inilah seseorang masuk ke dalam subpopulasi *Exposed*. TB terbagi menjadi dua jenis, yaitu TB laten dan TB aktif. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan terbentuknya Model SEIR untuk penyebaran penyakit Tuberculosis, menentukan titik ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar pada Model SEIR untuk penyebaran penyakit Tuberculosis, menganalisis kestabilan pada Model SEIR untuk Penyebaran penyakit Tuberculosis di titik ekuilibrium, dan membuat simulasi numerik. Hasil dari penelitian ini adalah terbentuknya model matematika pada penyebaran penyakit Tuberculosis, dan dari model didapatkan dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Kemudian melalui metode *Next Generation Matrix* diperoleh bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan didapat bahwa model stabil asimtotik lokal dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan pada titik ekuilibrium endemik didapat bahwa model stabil asimtotik lokal dengan $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulasi numerik disajikan untuk menunjukkan solusi numerik dan memperkuat penjelasan dari analisis kestabilan model dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan parameter yang memenuhi syarat kestabilan.

Kata kunci: Tuberculosis, Model SEIR, Titik ekuilibrium, Analisis Kestabilan, Simulasi numerik.

Received: 15 September 2022, Accepted: 29 Mei 2023, Published: 1 Juni 2023

PENDAHULUAN

Model epidemiologi merupakan model yang membahas perilaku penyebaran penyakit menular dengan membangun model berdasarkan asumsi. Salah satu model epidemiologi adalah model SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*), dan salah satu penyakit menular yang dapat dimodelkan ke dalam model SEIR adalah penyakit tuberkulosis (TB). TB dapat dimodelkan ke dalam model SEIR karena bakteri penyebab TB memiliki masa inkubasi.

Penyakit TB terbagi menjadi dua jenis, yaitu TB laten dan TB Aktif (Frahm et al., 2011). Pada masa laten atau masa inkubasi sebelum bakteri aktif dan dapat menularkan ke orang lain inilah seseorang yang terinfeksi TB masuk ke dalam subpopulasi *Exposed*. Gejala utama pasien TB adalah batuk berdahak selama 2 minggu atau lebih, selain itu juga dapat diikuti beberapa gejala di antaranya dahak bercampur darah, sesak nafas, badan lemas, demam, malaise, nafsu makan menurun, dan berkeringat di malam hari tanpa adanya aktifitas (Kemenkes RI, 2018)

Penelitian-penelitian yang membahas tentang Penyakit TB dalam model epidemiologi di antaranya (Ridwan & Hadi, 2019), pada tulisan ini penulis menggunakan model SIR untuk mengetahui penyebaran tuberkulosis di Sulawesi Selatan. Kemudian penelitian (Ramadhan et al., 2018) meneliti penyebaran tuberkulosis dengan adanya strategi DOTS sebagai salah satu upaya untuk mendeteksi dan menyembuhkan penyakit tuberkulosis. Selanjutnya (Das et al., 2021) meneliti penyebaran penyakit tuberkulosis menggunakan model SEIR dengan mengemukakan analisis kestabilan Model dan analisis bifurkasi. Pada Artikel ini, penulis mengkaji dan memaparkan kembali bagian dari penelitian (Das et al., 2021) dan kemudian menyajikan solusi numerik model menggunakan Metode Runge-Kutta orde empat.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Model SEIR

Model SEIR adalah model yang digunakan untuk memprediksi penyebaran penyakit menular yang membagi populasi menjadi empat subpopulasi (Yang et al., 2020). Model ini dapat digunakan pada penyakit yang memiliki fase terekspos, di mana individu tersebut telah terinfeksi tetapi belum dapat menularkan ke individu lain. Fase ini juga dapat disebut sebagai masa inkubasi. Penyakit yang memiliki masa inkubasi adalah penyakit Tuberkulosis, dengan masa inkubasi sekitar 4-12 minggu.

2. Sistem Persamaan Diferensial

Menurut (Braun, 2013), Sistem persamaan diferensial *nonlinear* dituliskan

$$\frac{dx}{dt} = s(x) \quad (1)$$

$$\text{dengan } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ dan } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ s_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ s_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Titik ekuilibrium menurut (Wiggins, 2003) didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1

Titik ekuilibrium dari Persamaan (1) adalah $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, sedemikian hingga, $\mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, yaitu solusi yang tidak berubah terhadap waktu.

Persamaan (1) dapat dianalisis kestabilan lokalnya melalui proses linearisasi di persekitaran titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$. Hasil linearisasi menggunakan deret Taylor diperoleh matriks Jacobian yang dinyatakan dalam Persamaan (2) sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2)$$

3. Nilai Eigen, Nilai Eigen Dominan dan Teorema Kestabilan

Teorema 2 (Anton et al., 2019)

Jika matriks A berukuran $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari matriks A jika dan hanya jika $|A - \lambda I| = 0$ (3)

dengan I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$, maka persamaan di atas disebut persamaan karakteristik dari matriks A .

Definisi 3 (Anton et al., 2019)

Diberikan matriks A dengan ukuran $n \times n$, jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ merupakan nilai eigen yang berbeda dari matriks A dan jika $|\lambda_1|$ lebih besar dari $|\lambda_2|, \dots, |\lambda_k|$, maka λ_1 disebut nilai eigen dominan dari A . Setiap vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dominan disebut vektor eigen dominan dari A .

Teorema 4 (Bellomo & Preziosi, 1995), (Astuti et al., 2021), (Hananti & Mu'tamar, 2017)

Jika λ_j merupakan nilai eigen dari matriks Jacobian pada Persamaan (2) di titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ dan $Re(\lambda_j)$ merupakan bagian real dari λ_j maka:

- 1). Jika untuk setiap $j = 1, 2, 3, \dots, n, Re(\lambda_j) < 0$ maka $\hat{\mathbf{x}}$ stabil asimtotik
- 2). Jika terdapat $Re(\lambda_j) > 0$ untuk suatu j , maka $\hat{\mathbf{x}}$ tidak stabil.

4. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (*Basic reproduction number*) dinotasikan dengan R_0 . Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata dari para individu yang terinfeksi sekunder akibat tertular individu yang terinfeksi primer yang sepenuhnya masuk ke dalam subpopulasi rentan atau *Susceptible* (Van den Driessche & Watmough, 2002).

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan Metode *Next Generation Matriks* (Annas et al., 2020). Misal diberikan $c \in N$ pada subpopulasi yang terinfeksi dan $d \in N$ pada subpopulasi yang tidak terinfeksi, dengan N himpunan bilangan asli. Kemudian, dimisalkan \mathbf{x} merupakan subpopulasi yang terinfeksi dan \mathbf{y} merupakan subpopulasi yang tidak terinfeksi, dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^c$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4)$$

Selanjutnya, titik ekulilibrium bebas penyakit pada Persamaan (4) dituliskan sebagai $(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}})$, dan memenuhi $\mathbf{U}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}}) = 0$, dan $\mathcal{P}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}}) = 0$. Proses linearisasi di persekitaran titik ekuilibrium bebas penyakit pada Persamaan (4) ke 1 dilakukan untuk menentukan nilai R_0 . Kemudian subpopulasi \mathbf{x} yang telah dilinearisasi dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{DU} - \mathbf{DP}]\mathbf{x} \quad (5)$$

Berikut dituliskan rumus dari \mathbf{U} dan \mathcal{P} untuk perhitungan R_0 :

$$\mathbf{U} \text{ di } \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}}) \text{ dan } \mathcal{P} \text{ di } \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}})$$

Selanjutnya, diperoleh bentuk matriks *Next Generation* sebagai berikut

$$\mathbf{G} = \mathbf{UP}^{-1}$$

nilai R_0 merupakan nilai eigen dominan dari matriks \mathbf{G} .

5. Metode Runge-Kutta Orde 4

Menurut (Sudiarta, 2019) dan (Godio et al., 2020) penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode Runge-Kutta orde 4 merupakan proses dalam mencari nilai fungsi $y(t)$ pada titik t tertentu dengan menggunakan bentuk umum persamaan metode Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta x}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

dengan

$$k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ dan } \Delta x = y_{k+1} - y_k$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}\Delta x k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}\Delta x k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x k_3)$$

(Sudiarta, 2019)

METODE PENELITIAN

Penelitian diawali dengan menjelaskan pembentukan model SEIR pada penyebaran penyakit TB dan Model yang digunakan adalah Model SEIR pada penelitian (Das et al., 2021). Titik ekuilibrium Model ditentukan berdasarkan Definisi 1 dan bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan Metode matriks *Next Generation*. Selanjutnya, analisis kestabilan di titik ekuilibrium pada model dilakukan dengan cara: melakukan linearisasi model di sekitar titik ekuilibrium sehingga dapat ditentukan matriks *Jacobian*, menentukan nilai eigen dari matriks *Jacobian* dan kestabilan ditentukan berdasarkan Teorema 4, membuat simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde empat sehingga didapatkan hasil iterasi dan grafik model dan terakhir menginterpretasikan hasil yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Pembentukan Model

Penyebaran penyakit Tuberkulosis dapat dimodelkan dengan menggunakan model SEIR, di mana populasi pada model tersebut diasumsikan terbagi menjadi empat subpopulasi, yaitu:

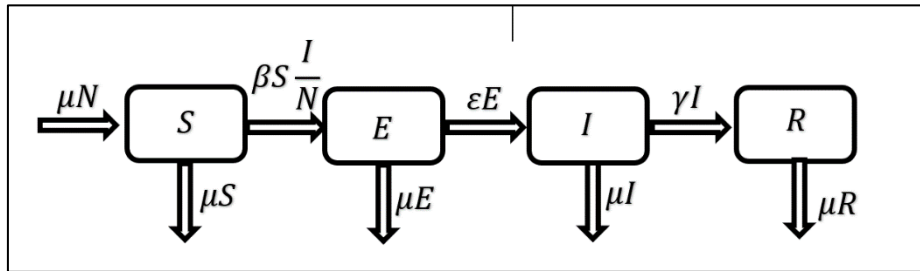
- (1) Subpopulasi *Susceptible* (rentan) dinotasikan dengan $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang sehat namun rentan terinfeksi penyakit tuberkulosis pada saat t .
- (2) Subpopulasi *Exposed* (terpapar) dinotasikan dengan $E(t)$ menyatakan jumlah individu yang telah terpapar dikarenakan adanya interaksi dengan individu terinfeksi tuberkulosis namun individu ini belum dapat menularkan ke individu lain pada saat t .
- (3) Subpopulasi *Infected* (terinfeksi) dinotasikan dengan $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang telah terinfeksi tuberkulosis pada saat t .
- (4) Subpopulasi *Recovered* atau dapat disebut dengan subpopulasi sembuh dinotasikan dengan $R(t)$ (sembuh) dari infeksi tuberkulosis pada saat t .

(Putra & Abidin, 2020)

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model ini sebagai berikut.

- 1). Laju kelahiran dan kematian setiap individu pada setiap subpopulasi diasumsikan sama, dan dinotasikan dengan μ .
- 2). Individu yang berinteraksi (kontak) dengan individu lain yang terinfeksi tuberkulosis menjadi individu terpapar, (virus pada individu ini dalam masa inkubasi dan dianggap belum bisa menularkan ke individu lain).

- 3). Setiap individu yang terpapar dan telah melewati masa inkubasi menjadi individu yang terinfeksi tuberkulosis, sehingga menjadi subpopulasi *Infected*.
- 4). Seseorang yang telah sembuh dari penyakit tuberkulosis akan langsung masuk ke subpopulasi *recovered*.
- 5). Kematian akibat tuberkulosis pada model ini dianggap tidak ada.
- 6). Setiap individu memiliki derajat interaksi yang sama.



Gambar 1. Bagan Alir Penyebaran Penyakit TBC (Das et al., 2021)

Parameter-parameter yang digunakan dalam model ini dapat didefinisikan sebagai berikut.

- μ : Laju kelahiran/laju kematian
 - γ : Laju kesembuhan
 - β : Laju Infeksi/penularan
 - ε : Laju aktivasi virus (seseorang yang terekspos menjadi terinfeksi penyakit tuberkulosis)
 - N : Total individu dalam populasi,
- $$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \quad (6)$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, diperoleh model matematika SEIR tuberkulosis sebagai berikut (Das et al., 2021)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \varepsilon)E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R. \end{aligned} \quad (7)$$

Dari Persamaan (6) diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$ yang memiliki arti bahwa $N(t)$ konstan. Kemudian model diubah menjadi model *non-dimensional*). Proporsi jumlah individu masing-masing subpopulasi dapat dinyatakan dengan $s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$, dari Persamaan (6) dapat ditentukan bahwa $s + e + i + r = 1$ selanjutnya Persamaan (7) menjadi

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \mu s - \beta is \quad (8)$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - (\mu + \varepsilon)e \quad (9)$$

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon e - (\mu + \gamma)i \quad (10)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r. \quad (11)$$

2. Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar untuk Model

Titik ekuilibrium model pada Persamaan (8)-(11), berdasarkan Definisi 1 harus memenuhi kondisi berikut

$$\mu - \mu s - \beta is = 0 \quad (12)$$

$$\beta si - (\mu + \varepsilon)e = 0 \quad (13)$$

$$\varepsilon e - (\mu + \gamma)i = 0 \quad (14)$$

$$\gamma i - \mu r = 0. \quad (15)$$

Persamaan (13) dan (14) diselesaikan diperoleh

$$i = 0 \quad \text{atau} \quad (16)$$

$$s = \frac{(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)}{\varepsilon \beta} \quad (17)$$

Persamaan (15) disubstitusi ke Persamaan (12), (13), dan (14) diperoleh $s = 1, e = 0, r = 0$, atau dapat ditulis menjadi $E_0 = (1, 0, 0, 0)$ dan selanjutnya disebut titik ekuilibrium bebas penyakit.

Berdasarkan Persamaan (4), Persamaan (8) hingga Persamaan (11), subpopulasi yang terinfeksi dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{de}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{U} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta is \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu + \varepsilon)e \\ \varepsilon e - (\mu + \gamma)i \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Selanjutnya \mathbf{U} dan \mathbf{P} dilinearisasi di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} (\mu + \varepsilon) & 0 \\ -\varepsilon & (\mu + \gamma) \end{pmatrix}$. Kemudian, diperoleh matriks *Next Generation*:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon \beta}{(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)} & \frac{\varepsilon \beta (\mu + \varepsilon)}{(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari Persamaan karakteristik Matriks \mathbf{G} diperoleh $\lambda_1 = 0$ & $\lambda_2 = \frac{\varepsilon \beta}{(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)}$. Berdasarkan Definisi 3 diperoleh nilai R_0 merupakan nilai eigen dominan, yaitu

$$R_0 = \frac{\varepsilon \beta}{(\mu + \varepsilon)(\mu + \gamma)}. \quad (19)$$

Selanjutnya, Persamaan (19) disubstitusi ke Persamaan (17), diperoleh

$$s = \frac{1}{\mathcal{R}_0}. \quad (20)$$

Persamaan (20) disubstitusi ke Persamaan (12), diperoleh

$$i = \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\mu + \varepsilon)R_0}. \quad (21)$$

Persamaan (21) disubstitusi ke Persamaan (15), diperoleh $r = \frac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta}$ dan

Persamaan (21) disubstitusi ke Persamaan (14), diperoleh $e = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\beta}$. Jadi diperoleh titik ekuilibrium kedua yaitu

$$E^*(s, e, i, r) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\mu + \varepsilon)R_0}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\beta}, \frac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta} \right) \quad (22)$$

Selanjutnya, titik ekuilibrium E^* disebut titik ekuilibrium endemik.

3. Analisis Kestabilan Model Matematika untuk Penyakit Tuberkulosis

3.1 Analisis Kestabilan di titik ekuilibrium bebas penyakit

Matriks Jacobian di titik E_0 dapat dinyatakan sebagai

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta & 0 \\ \beta i & -(\mu + \varepsilon) & \beta & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 2, Persamaan karakteristik dari Matriks $J(E_0)$ sebagai berikut.

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -(\mu + \varepsilon) - \lambda & \beta & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \gamma) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Persamaan (23) dapat ditentukan nilai eigennya melalui ekspansi kofaktor, diperoleh $\lambda_{1,2} = -\mu$, dan untuk $\lambda_{3,4}$ memenuhi $((\mu + \varepsilon) + \lambda)((\mu + \gamma) + \lambda) + \beta\varepsilon = 0$. Kemudian, berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, diperoleh bagian riil dari nilai eigen $\lambda_{3,4}$ bernilai negatif, sehingga berdasarkan Teorema 4, titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik, dengan syarat $R_0 < 1$.

3.2 Kestabilan di titik ekuilibrium endemik (E^*)

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium endemik dapat ditulis sebagai

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu R_0 & 0 & -\frac{\beta}{R_0} & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & -(\mu + \varepsilon) & \frac{\beta}{R_0} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

yang persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} -\mu\mathcal{R}_0 - \lambda & 0 & -\frac{\beta}{\mathcal{R}_0} & 0 \\ \mu(\mathcal{R}_0 - 1) & -(\mu + \varepsilon) - \lambda & \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\mu + \gamma) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Persamaan (25) dapat ditentukan nilai eigennya melalui ekspansi kofaktor, yaitu $\lambda_1 = -\mu$, dan untuk $\lambda_{2,3,4}$ memenuhi $((\mu + \varepsilon) + \lambda)((\mu + \gamma) + \lambda)(-\mu\mathcal{R}_0 - \lambda) + \frac{\beta\varepsilon}{\mathcal{R}_0}(\mu + \lambda) = 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bagian riil $\lambda_{2,3,4}$ bernilai negatif, sehingga berdasarkan Teorema 4, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$.

4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik untuk model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

4.1 Simulasi numerik titik ekuilibrium bebas penyakit

Diberikan nilai awal untuk setiap subpopulasi yaitu $s(0) = 0,645$, $e(0) = 0,129$, $i(0) = 0,065$, dan $r(0) = 0,161$ dengan nilai parameter $\mu = 0,4$, $\gamma = 0,1472$, $\varepsilon = 0,45$ dan $\beta = 0,468$. Nilai parameter-parameter tersebut disubstitusi ke Persamaan (8), (9), (10), dan (11) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 0,4 - 0,4s - 0,468is \\ \frac{de}{dt} &= 0,468is - (0,4 + 0,45)e \\ \frac{di}{dt} &= 0,45e - (0,4 + 0,1472)i \\ \frac{dr}{dt} &= 0,1472i - 0,4r. \end{aligned} \quad (27)$$

Jika diambil interval waktu yang digunakan $[0,50]$ dan ukuran langkah $h = 0,1$ maka iterasi yang dilakukan sebanyak 500 iterasi.

Solusi numerik Persamaan (27), diawali dengan menentukan nilai $k_{1,1}$, $k_{1,2}$, $k_{1,3}$ dan $k_{1,4}$ pada saat $t = t_0 = 0$,

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= f_1(0; 0,645; 0,129; 0,065; 0,161) \\ &= 0,4 - (0,4)(0,645) - (0,468)(0,065)(0,645) \\ &= 0,1224 \\ k_{1,2} &= f_2(0; 0,645; 0,129; 0,065; 0,161) \\ &= (0,468)(0,065)(0,645) - (0,4 + 0,45)0,129 \\ &= -0,09 \\ k_{1,3} &= f_3(0; 0,645; 0,129; 0,065; 0,161) \\ &= 0,45(0,129) - (0,4 + 0,1472)0,065 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.0224 \\
 k_{1,4} &= f_1(0; 0.645; 0.129; 0.065; 0.161) \\
 &= 0.1472(0.065) - 0.4(0.161) \\
 &= -0.055.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menentukan nilai $s(t)$, $e(t)$, $i(t)$, dan $r(t)$ pada titik tengah dari $k_{1,1}$, $k_{1,2}$, $k_{1,3}$, dan $k_{1,4}$ pada saat $t = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$

$$\begin{aligned}
 s(0.05) &= s(0) + k_{1,1} \frac{h}{2} = 0.645 + (0.1224)(0.05) = 0.6511 \\
 e(0.05) &= e(0) + k_{1,2} \frac{h}{2} = 0.129 + (-0.09)(0.05) = 0.1245 \\
 i(0.05) &= i(0) + k_{1,3} \frac{h}{2} = 0.065 + (0.0224)(0.05) = 0.0661 \\
 r(0.05) &= r(0) + k_{1,4} \frac{h}{2} = 0.161 + (-0.055)(0.05) = 0.1582.
 \end{aligned}$$

Nilai $s(0.05)$, $e(0.05)$, $i(0.05)$, dan $r(0.05)$ digunakan di titik tengah $k_{1,1}$, $k_{1,2}$, $k_{1,3}$, dan $k_{1,4}$ pada saat $t = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$. Untuk mendapatkan $k_{2,1}$, $k_{2,2}$, $k_{2,3}$, dan $k_{2,4}$, berdasarkan Persamaan (27) pada saat $t = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 k_{2,1} &= f_1(0.05; 0.6511; 0.1245; 0.0661; 0.1582) \\
 &= 0.4 - (0.4)(0.6511) - (0.468)(0.0661)(0.6511) \\
 &= 0.1194 \\
 k_{2,2} &= f_2(0.05; 0.6511; 0.1245; 0.0661; 0.1582) \\
 &= (0.468)(0.0661)(0.6511) - (0.4 + 0.45)0.1245 \\
 &= -0.0749 \\
 k_{2,3} &= f_3(0.05; 0.6511; 0.1245; 0.0661; 0.1582) \\
 &= 0.45(0.1245) - (0.4 + 0.1472)0.0661 \\
 &= 0.0198 \\
 k_{2,4} &= f_4(0.05; 0.6511; 0.1245; 0.0661; 0.1582) \\
 &= 0.1472(0.0661) - 0.4(0.1582) \\
 &= -0.0535.
 \end{aligned}$$

Nilai $k_{2,1}$, $k_{2,2}$, $k_{2,3}$, dan $k_{2,4}$ digunakan untuk menentukan nilai $s(t)$, $e(t)$, $i(t)$, dan $r(t)$ pada titik nilai tengah pada nilai $k_{2,1}$, $k_{2,2}$, $k_{2,3}$, dan $k_{2,4}$ pada saat $t = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$

$$\begin{aligned}
 s(0.05) &= s(0) + k_{2,1} \frac{h}{2} = 0.645 + (0.1194)(0.05) = 0.6510 \\
 e(0.05) &= e(0) + k_{2,2} \frac{h}{2} = 0.129 + (-0.0749)(0.05) = 0.1252 \\
 i(0.05) &= i(0) + k_{2,3} \frac{h}{2} = 0.065 + (0.0198)(0.05) = 0.0659 \\
 r(0.05) &= r(0) + k_{2,4} \frac{h}{2} = 0.161 + (-0.0535)(0.05) = 0.1583
 \end{aligned}$$

Nilai $s(0.05)$, $e(0.05)$, $i(0.05)$, dan $r(0.05)$ digunakan di titik tengah $k_{2,1}$, $k_{2,2}$, $k_{2,3}$, dan $k_{2,4}$ pada saat $t = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$. Untuk mendapatkan $k_{3,1}$, $k_{3,2}$, $k_{3,3}$, dan $k_{3,4}$, berdasarkan Persamaan (4.40) pada saat $t = t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.1}{2} = 0.05$, diperoleh

$$\begin{aligned} k_{3,1} &= f_1(0.05; 0.6510; 0.1252; 0.0659; 0.1583) \\ &= 0.4 - (0.4)(0.6510) - (0.468)(0.0659)(0.6510) \\ &= 0.1195 \\ k_{3,2} &= f_2(0.05; 0.6510; 0.1247; 0.0659; 0.1583) \\ &= 0.468 - (0.0659)(0.6510) - (0.4 + 0.45)0.1252 \\ &= -0.0863 \\ k_{3,3} &= f_3(0.05; 0.6510; 0.1247; 0.0659; 0.1583) \\ &= 0.45(0.1252) - (0.4 + 0.1472) \cdot 0.0659 \\ &= 0.0203 \\ k_{3,4} &= f_4(0.05; 0.6510; 0.1247; 0.0659; 0.1583) \\ &= 0.1472(0.0659) - 0.4(0.1583) \\ &= -0.0536 \end{aligned}$$

Nilai $k_{3,1}$, $k_{3,2}$, $k_{3,3}$, dan $k_{3,4}$ digunakan untuk menentukan nilai $s(t)$, $e(t)$, $i(t)$, dan $r(t)$ pada titik nilai tengah pada nilai $k_{3,1}$, $k_{3,2}$, $k_{3,3}$, dan $k_{3,4}$ pada saat $t = t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} s(0.1) &= s(0) + k_{3,1}h = 0.645 + (0.1195)(0.1) = 0.6569 \\ e(0.1) &= e(0) + k_{3,2}h = 0.129 + (-0.0863)(0.1) = 0.1204 \\ i(0.1) &= i(0) + k_{3,3}h = 0.065 + (0.0203)(0.1) = 0.0670 \\ r(0.1) &= r(0) + k_{3,4}h = 0.161 + (-0.0536)(0.1) = 0.1556 \end{aligned}$$

Nilai $s(0.1)$, $e(0.1)$, $i(0.1)$, dan $r(0.1)$ digunakan di titik tengah $k_{3,1}$, $k_{3,2}$, $k_{3,3}$, dan $k_{3,4}$ pada saat $t = t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$. Nilai $k_{4,1}$, $k_{4,2}$, $k_{4,3}$, dan $k_{4,4}$, berdasarkan Persamaan (27) pada saat $t = t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$, diperoleh

$$\begin{aligned} k_{4,1} &= f_1(0.1; 0.6569; 0.1204; 0.0670; 0.1556) \\ &= 0.4 - (0.4)(0.6569) - (0.468)(0.0670)(0.6569) \\ &= 0.1170 \\ k_{4,2} &= f_2(0.1; 0.6569; 0.1204; 0.0670; 0.1556) \\ &= 0.468(0.0670)(0.6569) - (0.4 + 0.45)0.1204 \\ &= -0.0821 \\ k_{4,3} &= f_3(0.1; 0.6569; 0.1204; 0.0670; 0.1556) \\ &= 0.45(0.1204) - (0.4 + 0.1427)0.0670 \\ &= 0.0175 \\ k_{4,4} &= f_4(0.1; 0.6569; 0.1204; 0.0670; 0.1556) \\ &= 0.1472(0.0670) - 0.4(0.1556) \\ &= -0.0524. \end{aligned}$$

Solusi numerik Persamaan (27) pada saat $t = t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$, adalah

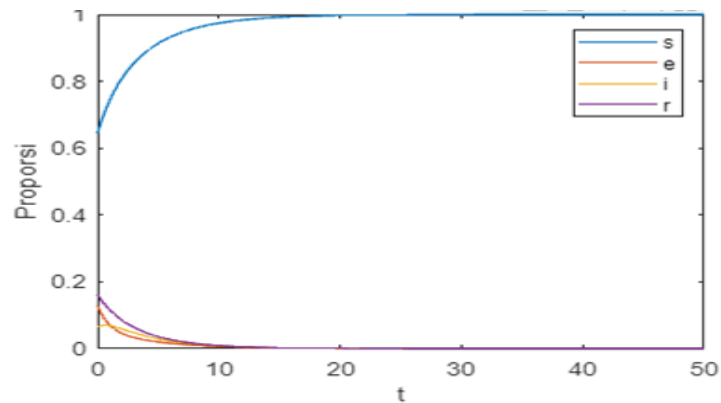
$$\begin{aligned}
 s(0.1) &= s(0) + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) \\
 &= 0.645 + \frac{0.1}{6}(0.1224 + 2(0.1194) + 2(0.1195) + (0.1170)) \\
 &= 0.6568 \\
 e(0.1) &= e(0) + \frac{h}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) \\
 &= 0.129 + \frac{0.1}{6}(-0.09 + 2(-0.0749) + 2(-0.0863) + (-0.0821)) \\
 &= 0.1207 \\
 i(0.1) &= i(0) + \frac{h}{6}(k_{1,3} + 2k_{2,3} + 2k_{3,3} + k_{4,3}) \\
 &= 0.065 + \frac{0.1}{6}(0.0224 + 2(0.0198) + 2(0.0203) + 0.0175) \\
 &= 0.0669 \\
 r(0.1) &= r(0) + \frac{h}{6}(k_{1,4} + 2k_{2,4} + 2k_{3,4} + k_{4,4}) \\
 &= 0.161 + \frac{0.1}{6}(-0.055 + 2(-0.0535) + 2(-0.0536) - 0.0524) \\
 &= 0.1556
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas, solusi numerik diringkas dan disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Solusi Numerik di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

t	s	e	i	r	Iterasi
0	0.645	0.129	0.064	0.161	0
0.1	0.6501	0.1309	0.0660	0.1556	1
1	0.7482	0.0684	0.0691	0.1143	10
2	0.8123	0.0449	0.0586	0.0842	20
3	0.8535	0.0338	0.0481	0.0646	30
4	0.8879	0.0260	0.0379	0.0482	40
5	0.9173	0.0197	0.0285	0.0345	50
30	0.9997	0.0001	0.0001	0.0001	300
35	0.9999	0.0000	0.0000	0.0000	350
40	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	400
45	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	450
50	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	500

Dari Tabel 1, simulasi numerik untuk titik ekuilibrium E_0 dapat diilustrasikan pada grafik sebagai berikut.



Gambar 2. Simulasi untuk titik ekuilibrium E_0

Berdasarkan Gambar 2, pada saat $t = 40$ setiap subpopulasi akan menuju titik ekuilibrium bebas penyakit. Pada proporsi subpopulasi *Exposed*, *Infected*, dan *Recovered* dari waktu ke waktu mengalami penurunan dan akan mendekati nilai nol. Sedangkan untuk proporsi subpopulasi *Susceptible* dari waktu ke waktu mengalami peningkatan, kemudian akan mendekati nilai satu.

4.2 Simulasi numerik titik ekuilibrium endemik (E^*)

Diberikan nilai awal untuk setiap subpopulasi yaitu $s(0) = 0,5806$, $e(0) = 0,129$, $i(0) = 0,2258$, dan $r(0) = 0,0645$ dengan nilai parameter $\mu = 0.012$, $\gamma = 0.104$, $\varepsilon = 0.148$ dan $\beta = 0.2568$. Nilai parameter-parameter tersebut disubstitusi ke Persamaan (8), (9), (10), dan (11) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= 0.012 - 0.012s - 0.2568is \\ \frac{de}{dt} &= 0.2568is - (0.012 + 0.148)e \\ \frac{di}{dt} &= 0.148e - (0.012 + 0.104)i \\ \frac{dr}{dt} &= 0.104i - 0.012r \end{aligned} \tag{28}$$

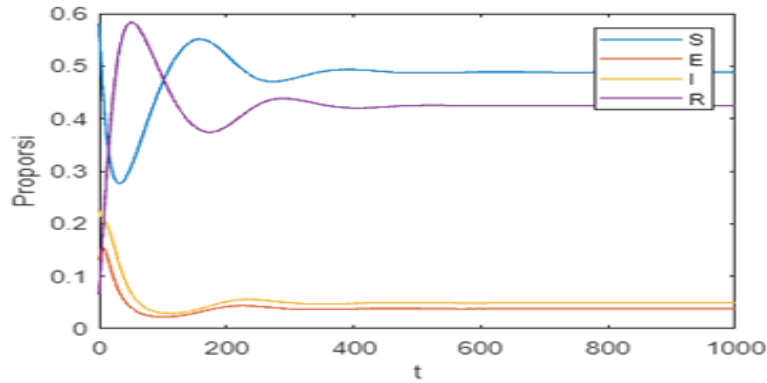
Berikut disajikan Tabel 2 merupakan hasil iterasi solusi model di sekitar titik endemik.

Tabel 2 Solusi Numerik di Titik Ekuilibrium Endemik

t	s	e	i	r	Iterasi
0	0.5806	0.1290	0.2258	0.0646	0
1	0.5766	0.1308	0.2248	0.0677	10
100	0.4724	0.0227	0.0299	0.4749	1000
150	0.5506	0.0305	0.0363	0.3826	1500
200	0.5201	0.0423	0.0518	0.3858	2000
250	0.4745	0.0425	0.0551	0.4279	2500
600	0.4887	0.0382	0.0489	0.4242	6000
700	0.4883	0.0384	0.0490	0.4243	7000

800	0.4883	0.0384	0.0490	0.4244	8000
900	0.4883	0.0384	0.0490	0.4243	9000
1000	0.4883	0.0384	0.0490	0.4243	10000

Berdasarkan Tabel 2 di atas, disajikan grafik solusi model di sekitar titik endemik.



Gambar 3. Simulasi Titik Ekuilibrium E^*

Gambar 3 merupakan solusi numerik model dengan parameter memenuhi syarat kestabilan di sekitar titik ekuilibrium. Dari grafik tersebut, dapat dilihat bahwa pada saat $t = 700$ setiap subpopulasi akan menuju titik ekuilibrium endemik. Pada grafik berwarna biru, yang menyatakan proporsi subpopulasi *Susceptible* berosilasi, kemudian akan konstan menuju titik ekuilibrium endemik. Grafik berwarna merah yang menyatakan proporsi subpopulasi *Exposed* akan turun dikarenakan terdapat perpindahan ke subpopulasi *Infected*. Kemudian solusi akan bernilai konstan menuju titik ekuilibrium. Untuk proporsi subpopulasi *Infected* dapat dilihat pada grafik berwarna kuning, grafik bergerak turun dikarenakan terjadi perpindahan ke subpopulasi *Recovered* dan juga bernilai konstan menuju titik ekuilibrium. Sedangkan, pada grafik berwarna ungu yang menyatakan proporsi subpopulasi *Recovered* akan berosilasi, dan kemudian menuju nilai konstan (menuju titik ekuilibrium).

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan dari penelitian ini yaitu didapatkan model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis *non-dimensional* dengan dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1, 0, 0, 0)$ dan titik endemik $E^*(s, e, i, r) = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu(\mathcal{R}_0-1)}{(\mu+\varepsilon)\mathcal{R}_0}, \frac{\mu(\mathcal{R}_0-1)}{\beta}, \frac{\gamma(\mathcal{R}_0-1)}{\beta} \right)$, dengan bilangan reproduksi dasar yang diperoleh $R_0 = \frac{\varepsilon\beta}{(\mu+\varepsilon)(\mu+\gamma)}$. Selanjutnya, berdasarkan analisis kestabilan: titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dengan syarat $\mathcal{R}_0 < 1$, yang berarti bahwa seiring berjalannya waktu populasi akan terbebas dari penyakit tuberkulosis dengan syarat bilangan reproduksi dasar

kurang dari satu, dan pada titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dengan syarat $\mathcal{R}_0 > 1$, yang berarti bahwa dari waktu ke waktu penyakit tuberkulosis akan menyebar dalam populasi. Hasil dari simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4, memperkuat hasil yang diperoleh dari analisis kestabilan, dan memberikan visualisasi untuk titik ekuilibrium bebas penyakit maupun pada titik ekuilibrium endemik.

REFERENSI

- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*, 139. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. (2019). *Elementary Linear Algebra Applications Version* (12th ed.). Wiley.
- Astuti, V., Yulida, Y., & Thresye. (2021). Model Matematika Penyebaran Penyakit Diare dengan adanya Treatment. *Jurnal Epsilon*, 15(1), 46–57.
- Bellomo, N., & Preziosi, L. (1995). *Modelling mathematical Methods and Scientific Computation*. Springer-Verlag New York Inc.
- Braun, M. (2013). Differential Equations and Their Application. In *Journal of Chemical Information and Modeling* (Vol. 53, Issue 9).
- Das, K., Murthy, B. S. N., Samad, S. A., & Biswas, M. H. A. (2021). Mathematical transmission analysis of SEIR tuberculosis disease model. *Sensors International*, 2(April), 100120. <https://doi.org/10.1016/j.sintl.2021.100120>
- Frahm, M., Goswami, N. D., Owzar, K., Hecker, E., Mosher, A., Cadogan, E., Nahid, P., Ferrari, G., & Stout, J. E. (2011). Discriminating between latent and active tuberculosis with multiple biomarker responses. *Tuberculosis*, 91(3), 250–256. <https://doi.org/10.1016/j.tube.2011.02.006>
- Godio, A., Pace, F., & Vergnano, A. (2020). *Godio-2020-SEIR Modeling of the Italian Epide1.pdf*.
- Hananti, C. N., & Mu'tamar, K. (2017). Analisis Model SIR Penyebaran Demam Berdarah Dengue Menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. *Jurnal Universitas Riau*, 1, 1–13.
- Kemenkes RI. (2018). Tuberkulosis (TB). In *Tuberkulosis* (Vol. 1, Issue april).
- Putra, Z. A., & Abidin, S. A. Z. (2020). Application of SEIR Model in Covid-19 and The Effect of Lockdown on Reducing The Number of Active Case. *Indonesian Journal of Science and Technology*, 2, 185–192.
- Ramadhan, M. R., Waluya, S. B., & Kharis, M. (2018). Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Strategi DOTS. *Ujm*, 1(2252), 125–130.
- Ridwan, M. R., & Hadi, A. (2019). Penggunaan dan Pengembangan Model Epidemi SIR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Sulawesi Selatan. *Jurnal Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya*, 7(2), 37–44.
- Sudiarta, I. W. (2019). *Metode Numerik*. Arga Puji Press.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48.

- Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Issue January 2003). <https://doi.org/10.1007/b97481>
- Yang, Z., Zeng, Z., Wang, K., Wong, S. S., Liang, W., Zanin, M., Liu, P., Cao, X., Gao, Z., Mai, Z., Liang, J., Liu, X., Li, S., Li, Y., Ye, F., Guan, W., Yang, Y., Li, F., Luo, S., ... He, J. (2020). Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions. *Journal of Thoracic Disease*, 12(3), 165–174. <https://doi.org/10.21037/jtd.2020.02.64>