# MODEL NON LINEAR PENYAKIT DIABETES

**Aminah Ekawati[1] dan Lina Aryati[2]**
[1]Kopertis Wilayah XI
[2]Program Studi Matematika FMIPA UGM

## ABSTRAK

Model matematika penyakit diabetes yang dibentuk berupa persamaan nonlinear. Selanjutnya, model diselidiki titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibriumnya. Metode numerik digunakan untuk mengetahui jumlah penderita diabetes.

**Kata kunci**: *Penyakit diabetes, titik ekuilibrium, kestabilan titik ekuilibrium, metode numerik*.

## ABSTRACT

The mathematical model may be classified by non-linear. The non-linear case is discussed and the critical values of the population are analyzed for stability. Numerical methods are developed for solving the model equations.

**Key words**: *diabetic, equilibrium point, stability of equilibrium point, numerical methods*.

## 1. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika yang dikembangankan dalam bidang kesehatan salah satunya adalah model penyakit diabetes. Biasanya pemodelan matematika digunakan untuk memprediksi penyebaran penyakit yang dapat menyebabkan epidemi. Namun pada makalah ini akan dibahas penyakit diabetes yang bukan merupakan penyakit epidemi.

Dalam Ekawati (2011) model penyakit diabetes berdasarkan probabilitas seseorang menderita diabetes tanpa komplikasi menjadi menderita diabetes dengan komplikasi konstan telah diselidiki titik ekuilibrium dan kestabilannya. Selanjunya pada artikel ini akan dibahas jika probabilitas seseorang menderita diabetes tanpa komplikasi menjadi menderita diabetes dengan komplikasi bergantung dengan waktu.

Diabetes merupakan penyakit yang dapat menyebabkan terjadinya penyakit lain atau dengan kata lain penyakit yang memiliki komplikasi paling banyak. Hal ini berkaitan dengan kadar gula darah yang tinggi terus menerus, sehingga berakibat rusaknya pembuluh darah, saraf dan struktur internal lainnya. Penderita diabetes dapat mengalami berbagai komplikasi jika kadar gula darahnya tidak dikelola dengan baik. Komplikasi yang sering terjadi dan mematikan adalah serangan jantung dan stroke. Menurut Hans, Penyakit diabetes menjadi penyebab kematian diurutan ketujuh dunia.

Model matematika yang dibahas adalah model matematika yang menggambarkan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi bentuk nonlinear. Model matematika ini akan dianalisa untuk mengetahui titik ekuilibrium dan kestabilannya. Kemudian melalui metode numerik akan dicari sistem persamaan diferensinya. Sistem persamaan diferensi akan dilakukan simulasi untuk memperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi beberapa tahun mendatang.

Penelitian ini bertujuan untuk:

i). Membentuk model matematika yang berhubungan dengan jumlah penderita diabetes.
ii). Mencari titik ekuilibrium model dan menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium.
iii). Mencari titik tetap yang diperoleh menggunakan metode numerik.
iv). Mengetahui jumlah penderita diabetes dengan komplikasi.

## 2. TINJAUN PUSTAKA

### 2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ dan kondisi awal $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in E$. Notasi $x(t) = x(x_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (1) yang melalui $x_0$. Selanjutnya, diberikan definisi titik ekuilibrium Sistem (1) sebagai berikut.

**Definisi 1.** *Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (1) jika $f(\hat{x}) = 0$.*
Diberikan sistem persamaan diferensial homogen sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x} \tag{2}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E \subset \mathbb{R}^n$ dan A matriks ukuran $n \times n$.
Berikut ini diberikan sistem persamaan diferensial yang linier

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

dengan $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ dan $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fungsi kontinu pada $E$.
Sistem (3) disebut sistem non linear jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2).

**Definisi 2.** *Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ pada Sistem (3) dengan $f_i \in C^{'}(E), i = 1, 2, \dots, n$. Matriks*

$$J\big(f(x)\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

*dinamakan matriks Jocabian dari $f$ d ititik $\boldsymbol{x}$.*

**Definisi 3.** *Diberikan matriks Jacobian $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ pada (4). Sistem linier $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})\big)\boldsymbol{x}$ disebut linierisasi Sistem (3) di sekitar titik $\hat{\boldsymbol{x}}$.*
Sifat kestabilan titik ekuilibrium $\hat{x}$ dapat diketahui dengan menggunakan matriks Jacobian $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})\big)$ asalkan titik tersebut hiperbolik. Selanjutnya diberikan definisi titik ekuilibrium hiperbolik.

**Definisi 4.** *Titik ekuilibrium* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (3) jika tidak ada nilai eigen dari* $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}})\big)$ *yang mempunyai bagian real nol.*

**Teorema 1.** *Diberikan matriks Jacobian* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}))$ *dari Sistem (3) dengan nilai eigen* $\lambda$.
*(i). Jika matriks Jacobian* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}))$ *mempunyai Re* $(\lambda) < 0$, *untuk* $i = 1, 2, \dots, n$ *maka* $\hat{x}$ *dari sistem nonlinier stabil asimtotik lokal.*
*(ii). Jika matriks Jacobian* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}))$ *mempunyai Re* $(\lambda) \leq 0$ *untuk* $i = 1, 2, \dots, n$, *dan jika Re* $(\lambda) = 0$ *bersesuaian dengan vektor eigen sebanyak multiplisitas* $\lambda$ *maka* $\hat{x}$ *dari sistem nonlinier stabil lokal.*
*(ii). Jika terdapat nilai eigen matriks Jacobian* $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}))$ *yang mempunyai bagian real positif, maka titik ekulibrium* $\hat{x}$ *dari sistem nonlinier tak stabil.*

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensi

Diberikan sistem persamaan diferensi sebagai berikut;

$$x(n+1) = f\big(x(n)\big). \tag{5}$$

dengan $x(n) = \big(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\big) \in \mathbb{R}^k$ dan $f$ fungsi kontinu pada $x$

**Definisi 5.** *Titik* $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ *disebut titik tetap Sistem (5) jika* $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Diberikan sistem persamaan diferensi nonlinear

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)), \\ x_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)), \\ &\vdots, \\ x_k(n+1) &= f_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)). \end{aligned} \tag{6}$$

dengan $\boldsymbol{x}(n) = \big(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\big) \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, dan $\boldsymbol{f}$ fungsi nonlinier.
Selanjutnya, titik tetap Sistem (6) adalah $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$. Matriks Jacobian dari fungsi $f$ Sistem (6) di titik $\bar{x}$

$$J\big(f(\bar{x})\big) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_k} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 2.** *Jika* $\bar{x}$ *adalah titik tetap fungsi* $f$ *Sistem (6) dan spectral radius dari matrik Jacobian* $f$ *Sistem (6) di titik tetap* $\bar{x}$ *kurang dari satu, maka titik tetap* $\bar{x}$ *stabil asimtotik lokal.*

## 2.3 Metode Euler

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$x' = Ax \tag{7}$$

dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$ dan A matriks ukuran $n \times n$. Selanjutnya, Sistem (7) menggunakan metode Euler diperoleh

$$x'(n+1) = (I + Ah)x(n).$$

Menurut Butcher (2008), daerah kestabilan metode Euler untuk Sistem (7) adalah $|1 + h\lambda| \leq 1$, dengan $\lambda$ merupakan nilai eigen dari matriks $A$ dan $\lambda \leq 0$.

## 3. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan cara studi literatur yaitu mempelajari jurnal-jurnal dan buku-buku yang berkaitan dengan model penyakit diabetes. Prosedur penelitian diawali dengan menentukan asumsi, menentukan parameter model, dan menggambar diagram transfer untuk membentuk model penyakit diabetes.

Selanjutnya, mencari titik ekuilibrium model dan menganalisa kestabilan model yang diberikan. Kemudian, mencari titik tetap menggunakan metode Euler dan metode beda hingga. Simulasi numerik digunakan untuk menentukan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi jika nilai parameter model diberikan.

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam model ini, populasi dibagi menjadi 2 kelas yaitu kelas populasi penderita diabetes tanpa komplikasi ($C$), dan kelas populasi penderita diabetes dengan komplikasi ($D$). Penderita diabetes dengan komplikasi dapat mengalami kematian akibat diabetes atau dapat mengalami *disable*.

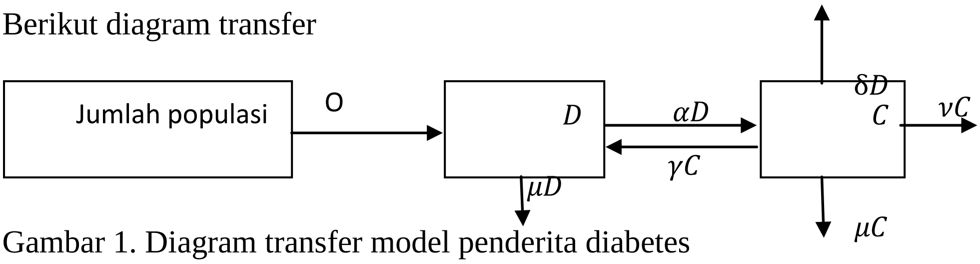
Jumlah penderita diabetes yaitu jumlah penderita diabetes tanpa komplikasi pada saat t ditambah jumlah penderita diabetes dengan komplikasi pada saat t, sehingga $N(t) = D(t) + C(t)$.

Adapun parameter yang digunakan adalah $\mu, \alpha, \gamma, \nu$, dan $\delta$. Parameter $\mu$ menyatakan laju kematian alami, $\alpha$ menyatakan probabilitas seseorang menderita diabetes dengan kompikasi, $\gamma$ menyatakan laju penderita diabetes dapat disembuhkan, $\nu$ menyatakan laju penderita diabetes dengan komplikasi menjadi disable, dan $\delta$ menyatakan laju kematian akibat menderita diabetes. Nilai $\mu, \alpha, \gamma, \nu, \delta > 0$.

Pada pemodelan yang akan dibentuk, digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Terjadi kematian alami disetiap kelas populasi.
2. Jumlah kasus baru penderita diabetes masuk dalam kelas populasi penderita diabetes tanpa komplikasi.
3. Kematian akibat penyakit diabetes hanya terjadi pada kelas populasi penderita diabetes dengan komplikasi.
4. Penderita diabetes dengan komplikasi dapat menyebabkan *disable* atau kecacatan atau kelumpuhan, sedangkan pada penderita diabetes tanpa komplikasi tidak menyebabkan *disable*.
5. Penderita diabetes tanpa komplikasi dapat menjadi penderita diabetes dengan komplikasi jika ada kadar gula darahnya tidak dikelola dengan baik begitu juga sebaliknya penderita diabetes dengan komplikasi dapat menjadi penderita diabetes tanpa komplikasi.

Berikut diagram transfer




Gambar 1. Diagram transfer model penderita diabetes

Berdasarkan diagram transfer, formulasi model matematika untuk penderita diabetes sebagai berikut:

$$D' = O - (\alpha + \mu)D + \gamma C, \tag{8}$$

$$C' = \alpha D - (\mu + \gamma + \nu + \delta)C. \tag{9}$$

Karena diketahui $N = D + C$, maka $D = N - C$. (10)

Kemudian Persamaan (10) disubtitusikan ke Persamaan (8) dan Persamaan (9) sehingga diperoleh

$$C' = \alpha N - (\theta + \alpha)C,\ t > 0, \tag{11a}$$

$$N' = O - \mu N - (\nu + \delta)C,\ t > 0. \tag{11b}$$

Jika diberikan nilai awal $C(0) = C_0 > 0$ dan $N(0) = N_0 > 0$ pada Persamaan (11a) dan Persamaan (11b) maka Persamaan (11a) dan Persamaan (11b) menjadi masalah nilai awal berikut.

$$C' = \alpha N - (\theta + \alpha)C,\ t > 0, C(0) = C_0 > 0, \tag{12a}$$

$$N' = O - \mu N - (\nu + \delta)C,\ t > 0, N(0) = N_0 > 0. \tag{12b}$$

Selanjutnya, diberikan $\alpha = \beta \frac{C}{N}$ sehingga persamaan (12a) dan persamaan (12b) menjadi

$$C' = (\beta - \theta)C - \beta \frac{C^2}{N},\ t > 0,\ C(0) = C_0. \tag{13a}$$

$$N' = O - (\nu + \delta)C - \mu N, t > 0,\ N(0) = N_0. \tag{13b}$$

Berikutnya akan diselidiki titik ekuilibrium dan kestabilan Sistem (13).

**Teorema 3.** *Jika $\alpha = \beta \frac{C}{N}$ dan $\beta > \theta$, maka Sistem (13) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu*

*i).* $(C^{**}, N^{**}) = (0, \frac{O}{\mu})$.

*ii).* $(C^{***}, N^{***}) = (\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta + (\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta + (\nu+\delta)(\beta-\theta)})$.

Sebelumnya diketahui bahwa nilai parameter $\mu, \alpha, \gamma, \nu, \delta, \beta > 0$. Agar titik ekuilibrium $(C^{***}, N^{***}) = \left(\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta + (\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta + (\nu+\delta)(\beta-\theta)}\right)$ bernilai positif maka $\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta + (\nu+\delta)(\beta-\theta)} > 0$ dan $\frac{\beta O}{\mu\beta + (\nu+\delta)(\beta-\theta)} > 0$ dengan kata lain $\beta - \theta$ harus positif atau $\beta > \theta$.

**Teorema 4.** *Jika $\alpha = \beta \frac{C}{N}$ dan $\beta > \theta$, maka Sistem (13) dengan titik ekuilibrium,* *i).* $(C^{**}, N^{**}) = (0, \frac{O}{\mu})$ *tidak stabil.*

*ii).* $(C^{***}, N^{***}) = \left(\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}\right)$ *stabil asimtotik lokal.*

Bukti:

i). Matrik Jacobian fungsi $(f_1, f_2)$ dari Sistem (13) di $\left(0, \frac{O}{\mu}\right)$ yaitu $Jf\left(0, \frac{O}{\mu}\right) = \begin{bmatrix} (\beta-\theta) & 0 \\ -(\nu+\delta) & -\mu \end{bmatrix}$. Persamaan karakteristik matrik $Jf\left(0, \frac{O}{\mu}\right)$ adalah $\lambda^2 + (\mu+\theta-\beta)\lambda + \mu(\theta-\beta)) = 0$. Berdasarkan Persamaan karakteristik didapat nilai eigen $\lambda_1 = \beta - \theta$ dan $\lambda_2 = -\mu$. Jadi titik ekuilibrium $(C^{**}, N^{**}) = (0, \frac{O}{\mu})$ tidak stabil.

ii). Matrik Jacobian fungsi $(f_1, f_2)$ dari Sistem (13) di $\left(\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}\right)$ yaitu $Jf\left(\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}\right) = \begin{bmatrix} -(\beta-\theta) & \frac{(\beta-\theta)^2}{\beta} \\ -(\nu+\delta) & -\mu \end{bmatrix}$. Persamaan karakteristik matrik $J\left(\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}\right)$ adalah $\lambda^2 + (\mu+\beta-\theta)\lambda + \mu(\beta-\theta)) + (\nu+\delta)\frac{(\beta-\theta)^2}{\beta} = 0$. Berdasarkan persamaan karakteristik diperoleh $\lambda_{1,2} = \frac{-(\mu+\beta-\theta)\pm\sqrt{\phi}}{2}$, sehingga kemungkinan nilai eigen yang diperoleh, yaitu

a). Jika $\phi = 0$, maka $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-(\mu+\beta-\theta)}{2}$, karena $\beta - \theta > 0$ maka $\lambda$ bernilai negatif.

b). Jika $\phi < 0$, maka diperoleh $\lambda_{1,2}$ keduanya bernilai kompleks dan mempunyai bagian real negatif.

c). Jika $\phi > 0$, maka $\lambda_{1,2}$ keduanya real dan negatif .

Berdasarkan a), b), dan c) dapat disimpulkan titik ekuilibrium $(C^{***}, N^{***}) = \left(\frac{O(\beta-\theta)}{(\nu+\delta)(\beta-\theta)+\mu\beta}, \frac{O\beta}{(\nu+\delta)(\beta-\theta)+\mu\beta}\right)$ stabil asimtotik lokal.

Metode numerik yang digunakan adalah metode beda hingga metode Euler.

1. Metode beda hingga

   Metode beda hingga digunakan untuk $C'$ dan $N'$,dengan $C' = \frac{C_{n+1}-C_n}{h}$ dan $N' = \frac{N_{n+1}-N_n}{h}$. Kemudian, berdasarkan Boutayeb (2006), $(\beta-\theta)C - \beta\frac{C^2}{N}$ diubah menjadi

$(\beta-\theta)C_n-\beta\frac{C_{n+1}C_n}{N_n}$ dan $O-(\nu+\delta)C-\mu N$ diubah menjadi $O-(\nu+\delta)C_n-\mu N_{n+1}$. Sehingga diperoleh persamaan diferensi

$$C_{n+1}=\frac{\left(1+h(\beta-\theta)\right)C_n}{\left(1+h\beta\frac{C_n}{N_n}\right)}. \tag{14a}$$

$$N_{n+1}=\frac{N_n+h(O-(\nu+\delta)C_n)}{1+h\mu}. \tag{14b}$$

**Teorema 5**. *Jika $\beta>\theta$, maka Sistem (14) mempunyai dua titik tetap yaitu,*

*i).* $(C^{++},N^{++})=\left(0,\frac{O}{\mu}\right)$ *tidak stabil.*

*ii).* $(C^{+++},N^{+++})=\left(\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)},\frac{\beta O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}\right)$ *stabil asimtotik lokal.*

2. Metode Euler

Metode Euler digunakan pada Persamaan (13a) dan Persamaan (13b) sehingga diperoleh persamaan diferensi berikut.

$$C_{n+1}=\left(1+h(\beta-\theta)-h\beta\frac{C_n}{N_n}\right)C_n. \tag{15a}$$

$$N_{n+1}=hO-h(\nu+\delta)C_n-(1-h\mu)N_n. \tag{15b}$$

**Teorema 6**. *Jika $\beta>\theta$ maka Sistem (15) mempunyai dua titik tetap*

*(i)* $(C^{++},N^{++})=(0,\frac{O}{\mu})$.

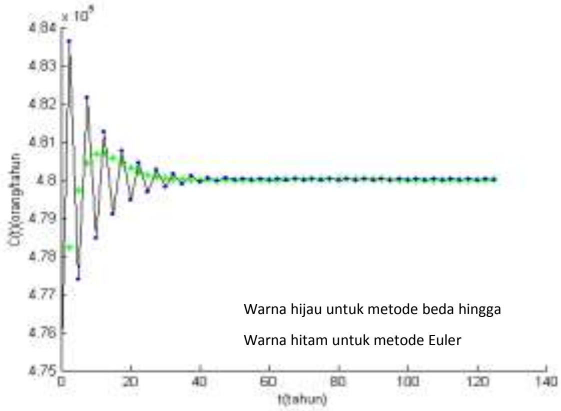
*(ii)* $(C^{+++},N^{+++})=\left(\frac{(\beta-\theta)O}{(\nu+\delta)(\beta-\theta)+\mu\beta},\frac{\beta O}{(\nu+\delta)(\beta-\theta)+\mu\beta}\right)$.

Daerah kestabilan $h<\frac{4}{\left((\mu+\beta-\theta)+\sqrt{(\mu+\beta-\theta)^2-4\left(\left(\mu(\beta-\theta)\right)+(\nu+\delta)\frac{(\beta-\theta)^2}{\beta}\right)}\right)}$.

Berdasarkan Boutayeb (2006) terdapat 60000 kasus baru penderita diabetes setiap tahun, sehingga diambil nilai untuk parameter $O$ = 60000 orang. Kemudian dalam Boutayeb (2006) diberikan untuk parameter $\alpha$ = 0,66 pertahun, $\mu$ = 0,02 pertahun, $\gamma$ = 0,08 pertahun, $\nu$ = 0,05 pertahun, $\delta$ = 0,05 pertahun, dan $\beta$ = 1 pertahun. Selanjutnya akan disajikan kedua metode tersebut dalam satu grafik dengan nilai $h$ = 2,50 tahun dan $h$ = 2,90 tahun.

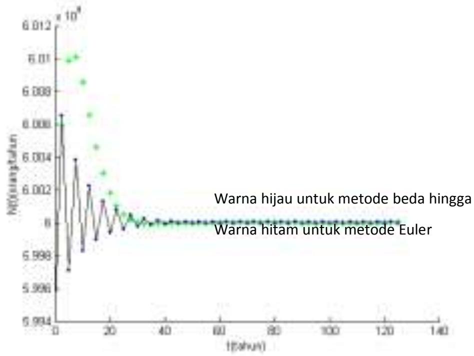
1). $h$ = 2,50 tahun

Berdasarkan Boutayeb (2006), kondisi awal $C_0$ = 475.500 orang dan $N_0$ = 595.500 orang.




Gambar 3.5.5 Grafik *C(t)* menggunakan metode beda hingga dan metode Euler dengan $h$ = 2,50.

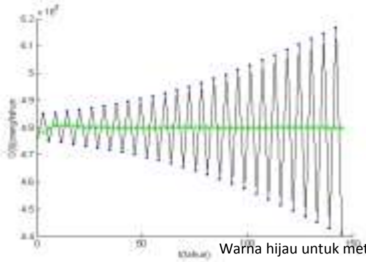
Dari Gambar (3.5.5) terlihat bahwa untuk kedua metode tersebut maka untuk $t \to \infty$ diperoleh nilai *C(t)* yang akan menuju titik ekuilibrium. Dengan kata lain jumlah penderita diabetes dengan komplikasi untuk waktu yang panjang akan menunju suatu konstanta tertentu. Pada simulasi ini diperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi dalam waktu panjang akan berjumlah 480.000 orang.




Gambar 3.5.6 Grafik *N(t)* menggunakan metode beda hingga dan metode Euler dengan $h$ = 2,50.

Dari Gambar (3.5.6) terlihat bahwa untuk kedua metode tersebut maka untuk $t \to \infty$ diperoleh nilai *N(t)* yang akan menuju titik ekuilibrium. Dengan kata lain jumlah penderita diabetes dengan komplikasi untuk waktu yang panjang akan menunju suatu konstanta tertentu. Pada simulasi ini diperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi dalam waktu panjang akan berjumlah 600.000 orang.

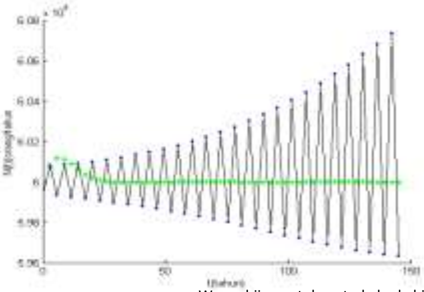
2). $h$ = 2,90 tahun




Gambar 3.5.7 Grafik *C(t)* menggunakan metode beda hingga dan metode Euler dengan *h* = 2,90 tahun.

Dari Gambar (3.5.7) untuk $t \to \infty$ nilai *C(t)* menggunakan metode beda hingga akan menuju titik ekuilibrium. Dengan kata lain jumlah penderita diabetes dengan komplikasi untuk waktu yang panjang akan menunju suatu konstanta tertentu. Pada simulasi ini diperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi dalam waktu panjang akan berjumlah 480.000 orang.

Namun untuk metode Euler ternyata terbentuk osilasi hal ini disebabkan karena metode Euler memiliki daerah kestabilan. Berdasarkan Persamaan (3.3.71) diperoleh $h > 2{,}85$ yang menyebabkan metode Euler tidak stabil digunakan. Dengan kata lain metode Euler dengan $h = 2{,}90$ tidak dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penderita diabetes dengan komplikasi pada masa mendatang.




Gambar 3.5.8 Grafik *N(t)* menggunakan metode beda hingga dan metode Euler dengan *h* = 2,90 tahun.

Dari Gambar (3.5.8) untuk $t \to \infty$ nilai *C(t)* menggunakan metode beda hingga akan menuju titik ekuilibrium. Dengan kata lain jumlah penderita diabetes dengan komplikasi untuk waktu yang panjang akan menunju suatu konstanta tertentu. Pada simulasi ini diperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi dalam waktu panjang akan berjumlah 600.000 orang.

Namun untuk metode Euler ternyata terbentuk osilasi hal ini disebabkan karena metode Euler memiliki daerah kestabilan. Berdasarkan Persamaan (3.4.24) diperoleh $h > 2{,}85$ yang menyebabkan metode Euler tidak stabil digunakan. Dengan kata lain metode Euler dengan $h = 2{,}90$ tidak dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penderita diabetes dengan komplikasi pada masa mendatang.

Selanjutnya, menggunakan kedua metode tersebut dapat diperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi misalnya untuk 4 tahun mendatang dengan kondisi awal jumlah penderita diabetes dengan komplikasi 475.500 orang dan jumlah penderita diabetes 599.500 orang. Jika menggunakan metode beda hingga dengan $h$ = 0,5 tahun maka diperkirakan akan ada 479.790 orang sedangkan menggunakan metode Euler $h$ = 0,5 tahun diperkirakan akan ada 479.790 orang. Untuk 10 tahun mendatang diperkirakan akan ada 480.290 orang menggunakan metode beda hingga dengan $h$ = 1 tahun dan ada 480.050 orang menggunakan metode Euler dengan $h$ = 1 tahun.

## 5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh, yaitu:

1. Model penderita diabetes nonlinear sebagai berikut:

$$C' = (\beta - \theta)C - \beta\frac{C^2}{N}, t > 0, C(0) = C_0.$$
$$N' = O - (\nu + \delta)C - \mu N, t > 0, N(0) = N_0.$$

nilai $O$ suatu konstanta.

2. Diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu:

(i). $(C^{**}, N^{**}) = (0, \frac{O}{\mu})$ dan titik ekuilibrium ini tidak stabil.

(ii). $(C^{***}, N^{***}) = (\frac{(\beta-\theta)O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)}, \frac{\beta O}{\mu\beta+(\nu+\delta)(\beta-\theta)})$ dan titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal. Atau dengan kata lain jumlah penderita diabetes dengan komplikasi dalam jangka panjang akan menuju suatu konstanta tertentu

3. Hasil simulasi menggunakan metode numerik menunjukkan sebagai berikut:

(i). Metode beda hingga dengan $h$ (langkah/stepsize) berapapun akan menuju titik ekuilibrium atau dengan kata lain dalam jangka panjang jumlah penderita diabetes dengan komplikasi akan menuju suatu konstanta tertentu.

(ii). Metode Euler dengan $|1 + h\lambda| > 1$, $h$ (langkah/stepsize) diperoleh gambar yang berosilasi atau divergen sehingga metode Euler dengan $|1 + h\lambda| > 1$ tidak dapat digunakan untuk memperkirakan jumlah penderita diabetes dengan komplikasi.

## 6. DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan Rorres, C., 2004, *Aljabar elementer Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan, alih bahasa oleh Indriasari, R. dan Harmaen, I.*, Erlangga, Jakarta.

A Boutayeb, EH Twizell, K Achouayb and A Chetouani., 2006, *A Non-Linear Population Model of Diabetes Mellitus*, J.Appl. Math & Computing Vol.21, No. 1-2, pp 127-139.

Butcher, 2008, *Numerical For Ordinary Differential Equations Second Edition*, John Wiley& Sons, England.

Ekawati, Aminah. 2011. *Model Penyakit Diabetes Dengan Komplikasi (Studi Kasus Sistem Persamaan Diferential Nonhomogen).*Jurnal Media Sains, April, 2011.

Elyadi, Saber., 2005, *An Introduction to Difference Equation Third Edition*, Springer-Science+Business Media,Inc, New-York.

Hans, 2008, *Jumlah Penderita Diabetes Melitus di Indonesia Meningkat*, http://www.nttonlinenews.com/ntt/index.php?view=article&id=1105%3Ajumlah-penderita-diabetes-melitus-di-indonesia-meningkat&option=com_content&Itemid=70, diakses tanggal 20 Maret 2010.

Kelly, Walter and Peterson, Allan., 2001, *Difference Equations Second Edition*, Academic Press Harcourt Science and Technologly Company, USA.

Kocak, H dan Hole,J.K,1991, *Dynamic and Bifurcation*, Springer-Verlag, New-Kelly, Walter and Peterson, Allan., 2001, *Difference Equations Second Edition*, Academic Press Harcourt Science and Technologly Company, USA.

Kocak, H dan Hole,J.K,1991, *Dynamic and Bifurcation*, Springer-Verlag, New-York.

Olsder, G.J., 2005, *Mathematical System Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherlands.

Peranginan, Kasiman., 2006, *Pengenalan Matlab*. Andi Yogyakarta, Yogyakarta.

Perko, L.,1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New-york.