



## MODEL EPIDEMIK PENYAKIT DIARE DENGAN FUNGSI INSIDENSI HOLLING TIPE DUA

Yuni Yulida<sup>1a\*</sup>, Aprida Siska Lestia<sup>2</sup>, Riska Fitria<sup>3</sup>,  
Azkia Khairal Jamil<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

<sup>2</sup>Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

<sup>3</sup>Mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

<sup>a</sup>Kelompok Keahlian: Matematika Lingkungan dan Industri

Jl. A. Yani km. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

\*e-mail: [y\\_yulida@ulm.ac.id](mailto:y_yulida@ulm.ac.id)

### ABSTRACT

The epidemic model is a form of mathematical model in the field of epidemiology. Diarrhea is one of the infectious diseases that can be prevented through treatment. The purpose of this study is to explain the formation of an epidemic model for the spread of diarrheal disease, to analyze the stability of the model, and to make a numerical simulation. This study uses the linearization method to linearize the nonlinear model. The next generation matrix method is used to determine the Basic reproduction number ( $R_0$ ) and the fourth-order runge kutta method is used to simulate the model. The results of this study, obtained an epidemic model of diarrheal disease in the form of a SIRT (Susceptible, Infected, Treatment, Recovered) model with a type 2 Holling incidence function. Furthermore, two equilibrium are obtained and it is shown that  $R_0$  plays an important role in the process of spreading the disease. If  $R_0 < 1$  then the disease-free equilibrium is asymptotically stable so that the population will be free from disease outbreaks. Conversely, if  $R_0 > 1$  then the endemic equilibrium is asymptotically stable so that the disease will always exist in the population. Based on the value of the sensitivity index, it shows that the parameters of the effective contact rate and birth rate are the most sensitive parameters (directly proportional) to changes in the value of  $R_0$ . Furthermore, a model simulation is given to provide an illustration of the stability analysis of the model.

**Keywords:** epidemic model, equilibrium, sensitivity analysis, stability,

### ABSTRAK

Model epidemik merupakan salah satu bentuk model matematika di bidang epidemiologi. Penyakit diare adalah salah satu penyakit menular yang dapat dicegah melalui treatment. Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan terbentuknya model epidemik penyebaran penyakit diare, menganalisis kestabilan model, dan membuat simulasi numerik. Penelitian ini menggunakan metode linierisasi untuk melinierkan model nonlinier. Metode matriks next generation untuk menentukan *Basic reproduction number* ( $R_0$ ) dan metode runge kutta orde empat untuk melakukan simulasi model. Hasil dari penelitian ini, diperoleh model epidemik penyakit diare berbentuk Model SIRT (*Susceptible, Infected, Treatment, Recovered*) dengan fungsi insidensi Holling Tipe 2. Selanjutnya, diperoleh dua titik ekuilibrium dan diperlihatkan bahwa  $R_0$  berperan penting dalam proses penyebaran penyakit. Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik sehingga populasi akan terbebas dari wabah penyakit. Sebaliknya jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik sehingga penyakit akan selalu ada dalam populasi. Berdasarkan nilai indeks sensitivitas menunjukkan bahwa parameter laju kontak efektif dan laju kelahiran adalah parameter

yang paling sensitif (berbanding lurus) terhadap perubahan nilai  $R_0$ . Selanjutnya, simulasi model diberikan untuk memperlihatkan ilustrasi terhadap analisa kestabilan model.

**Kata Kunci:** analisis sensitivitas, kestabilan, model epidemik, pemanenan, titik ekuilibrium

Received: 21 Oktober 2022, Accepted: 29 Oktober 2022, Published: 1 Desember 2022

## PENDAHULUAN

Diare (*diarrhea*) adalah suatu keadaan pengeluaran tinja yang tidak seperti biasanya atau dapat dikatakan tidak normal. Perubahan yang terjadi diantaranya berupa perubahan peningkatan volume, keenceran, dan frekuensi dengan atau tanpa lendir darah. Hal ini dapat terjadi lebih dari 3 kali per hari dan pada neonatus lebih dari 4 kali per hari (Selviana et al., 2017). Diare merupakan suatu penyakit lingkungan dengan faktor penyebab yang paling dominan adalah pembuangan tinja dan sarana air bersih. Dua faktor tersebut akan berinteraksi bersamaan dengan perilaku manusia. Individu yang terinfeksi penyakit diare dapat diberikan perlindungan untuk melawan infeksi melalui pengobatan (*treatment*) (Astuti et al., 2021).

Penelitian-penelitian tentang penyakit diare melalui pemodelan matematika diantaranya: (Chaturvedi et al., 2018) membahas tentang model epidemik SIR dengan kompartemen  $I$  (*Infected*) dibagi menjadi dua kompartemen, (Bonyah et al., 2019) memperhatikan laju penularan dari manusia ke manusia, (Lasisi et al., 2020) memasukkan efek sanitasi pada model epidemik. Model-model ini sangat berguna untuk memahami hubungan berbagai kasus dan melakukan evaluasi terhadap upaya-upaya penanganan kasus-kasus epidemiologi. Pemahaman dan hasil evaluasi ini sangat bermanfaat sebagai bahan pertimbangan dalam menyusun perencanaan tindakan pencegahan dan pengendalian masalah-masalah kesehatan.

Pada model epidemik, misalkan  $S(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $N(t)$  masing-masing menyatakan banyaknya individu rentan, individu terinfeksi, dan ukuran total populasi pada waktu  $t$ . Selanjutnya, misalkan  $\beta(N)$  adalah jumlah rata-rata kontak yang cukup untuk menularkan infeksi (atau disebut tingkat kontak efektif). Kemudian, diberikan  $\beta(N)I/N$  merepresentasikan jumlah rata-rata kontak individu yang rentan menjadi individu terinfeksi per satuan waktu. Jika  $\beta(N) = \beta N$  (yaitu, laju kontak bergantung pada total populasi,  $N$ ), maka fungsi insidensi  $h_1(I) = \beta I$  disebut kejadian aksi massa (*mass action incidence*). Jika  $\beta(N) = konstan$ , maka fungsi insidensi  $h_2(I) = \beta I/N$  disebut kejadian standar (*standard incidence*) (Hethcote, 2000). Kedua fungsi ini secara luas digunakan dalam model penyebaran penyakit seperti (Karim & Yulida, 2021), (Jannah et al., 2021), (Yulida & Karim, 2021). Fungsi insidensi lain yang banyak digunakan adalah fungsi insidensi Holling

tipe II, diberikan oleh  $h_3(I) = \beta I / (1 + kI)$ , dengan  $k > 0$ , (Safi & Garba, 2012), (Majeed, 2016).

Menurut (Safi & Garba, 2012), fungsi kejadian nonlinier tipe  $h_3(I)$ , pertama kali diperkenalkan oleh Capasso dan Serio, dalam penelitian mereka tentang penyakit kolera. Bentuk fungsi kejadian tersebut berasal dari fakta bahwa jumlah kontak efektif antara individu terinfeksi dan individu rentan menjadi jenuh pada saat tingkat infeksi tinggi, misalkan karena adanya tindakan pencegahan (sehingga terjadi perubahan perilaku) yang diambil oleh individu rentan dalam menghadapi penyakit yang sedang mewabah.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mengkaji dan mengembangkan penelitian (Astuti et al., 2021) dengan menggunakan bentuk fungsi insidensi Holling tipe dua. Dari Model yang terbentuk akan dianalisa kestabilan titik ekuilibrium dan analisa sensitivitas serta disajikan simulasi model.

## TINJAUAN PUSTAKA

### Sistem Persamaan Diferensial

Sistem Persamaan Diferensial (SPD) adalah gabungan beberapa persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang saling terikat. Suatu SPD dapat diklasifikasikan ke dalam dua kelompok, yaitu SPD linier dan SPD nonlinier. Bentuk SPD linier homogen orde satu mempunyai bentuk (Yulida, 2019), (Ross, 2004), (Farlow, 1994) sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

dengan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  dan dengan koefisien  $a_{ij}$

( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ) merupakan konstanta riil.

Sedangkan bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2}$$

dengan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  dengan  $f_j(x); j = 1, 2, \dots, n$  fungsi nonlinier (Braun, 1992).

### Analisis Kestabilan Sistem

Diberikan definisi titik ekuilibrium (Perko, 2001) sebagai berikut:

**Definisi 1.** Titik  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  disebut ekuilibrium (titik kesetimbangan) dari Persamaan (6) jika  $f(\hat{x}) = \mathbf{0}$ .

Analisis kestabilan ekuilibrium pada suatu sistem nonlinier dapat dilakukan melalui linearisasi. Sifat kestabilan ekuilibrium dari suatu SPD nonlinier yang dilinearisasi dapat diketahui jika titik tersebut hiperbolik.

Keadaan dinamik dari suatu sistem khususnya sistem linier dapat menggunakan sifat dari nilai eigen sistem dinamik tersebut. Secara formal definisi nilai eigen dan vektor eigen diberikan oleh (Ross, 2004) sebagai berikut.

**Definisi 2.** Jika  $A$  adalah suatu matriks  $n \times n$ , maka suatu vektor tak nol  $x$  pada  $\mathbb{R}^n$  disebut vektor eigen dari  $A$  jika  $Ax$  adalah suatu kelipatan skalar dari  $x$  sehingga

$$Ax = \lambda x \quad (3)$$

untuk sembarang skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai eigen dari  $A$  dan  $x$  disebut sebagai vektor eigen dari  $A$  yang terkait dengan  $\lambda$ .

(Bellomo & Preziosi, 1995) dan (Astuti et al., 2021), memberikan teorema untuk menentukan jenis kestabilan berdasarkan hasil linierisasi SPD nonlinier yaitu sebagai berikut:

**Teorema 3.** Jika  $\lambda_i$  merupakan nilai eigen dari matriks Jacobian  $n \times n$  di titik kesetimbangan  $\hat{x}$  dan  $Re(\lambda_i)$  merupakan bagian riil dari  $\lambda_i$

1. Untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $Re(\lambda_i) < 0$  maka  $\hat{x}$  stabil asimtotik
2. Jika terdapat  $Re(\lambda_i) > 0$  untuk suatu maka  $\hat{x}$  tidak stabil.

### **Basic Reproduction Number**

Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) berfungsi untuk menginformasikan penyebaran penyakit dan dapat menjadi parameter dalam memberikan strategi untuk pengendalian penyakit. Secara biologi bilangan reproduksi dapat diartikan jumlah rata-rata kasus infeksi sekunder yang terjadi ketika individu yang terinfeksi masuk ke dalam populasi yang semuanya rentan (populasi sehat). Salah satu cara menentukan *Basic Reproduction Number* dapat menggunakan Metode *Matriks Next Generation*.

Menurut (Driessche & Watmough, 2005), (Martcheva, 2015), bilangan reproduksi dasar (disimbolkan dengan  $R_0$ ) didefinisikan dalam pemodelan epidemiologi yang dapat berbentuk salah satu dari tiga nilai yang mungkin, yaitu:  $R_0 < 1$  (Penyakit akan hilang seiring waktu),  $R_0 = 1$  (Penyakit akan menjadi endemik dan tetap pada skala yang besar), atau  $R_0 > 1$  (Akan ada epidemik dengan tingkat yang tinggi berkaitan dengan kematian). Pada penelitian (Yulida & Karim, 2020), diberikan contoh gambaran penentuan dan penerapan bilangan reproduksi dasar.

### **Analisis Sensitivitas**

Analisis sensitivitas bertujuan untuk mengetahui parameter-parameter yang berpengaruh pada model, khususnya terhadap *Basic reproduction number*. Analisis

ini dilakukan pada saat kondisi  $R_0 > 1$  yang menunjukkan bahwa terjadinya penyebaran penyakit. Berdasarkan hal tersebut, maka perlu dilakukan analisis sensitivitas  $R_0$  terhadap parameter-parameter untuk mengetahui upaya yang harus dilakukan agar dapat menekan penyebaran penyakit. Analisis sensitivitas dilakukan dengan menentukan indeks sensitivitas dari parameter-parameter yang terlibat (Karim & Yulida, 2021). Berdasarkan (Chitnis et al., 2008) dan (Edward & Nyerere, 2015), indeks sensitivitas normalisasi dari *Basic reproduction number* didefinisikan sebagai berikut:

$$C_l^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial l} \times \frac{l}{R_0} \quad (4)$$

dengan  $l$  adalah parameter-parameter yang terdapat pada *Basic reproduction number* ( $R_0$ ).

## METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini dilakukan dengan studi literatur. Analisa dinamika Model epidemik penyebaran penyakit diare, meliputi: titik ekuilibrium (berupa titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik) menggunakan Definisi 1, *Basic reproduction number* ditentukan menggunakan metode *matriks next generation* dan Analisa kestabilan menggunakan Metode linierisasi. Selain itu, dilakukan analisa sensitivitas pada *Basic reproduction number* menggunakan Persamaan (4). Simulasi model disajikan dengan menentukan solusi numerik model menggunakan metode runge kutta orde empat.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Pembentukan Model

Penyakit diare merupakan salah satu penyakit menular yang dapat dimodelkan menggunakan model matematika. Model Matematika penyakit diare ini mengikuti model epidemik. Total populasi pada saat waktu  $t$ , disimbolkan dengan  $N(t)$ , terdiri dari empat subpopulasi yaitu

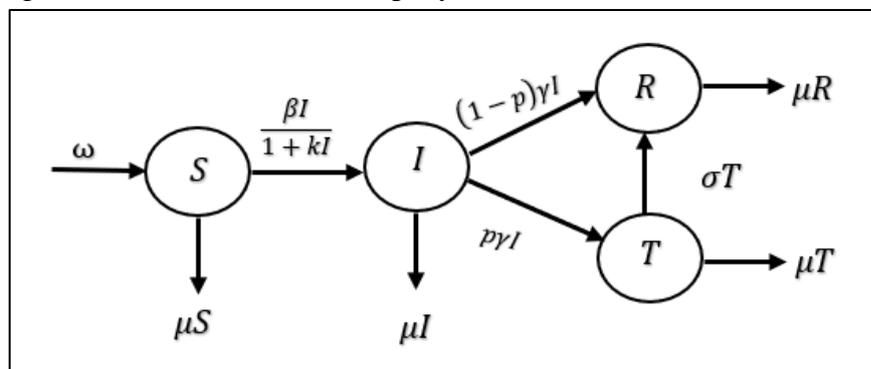
- 1) Populasi *Susceptible* (rentan), dinotasikan dengan  $S(t)$  menyatakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit diare pada saat  $t$ .
- 2) Populasi *Infected* (terinfeksi), dinotasikan dengan  $I(t)$  menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit diare pada saat  $t$ .
- 3) Populasi *Treatment* (dirawat), dinotasikan dengan  $T(t)$  menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit diare (akut/parah) yang diberikan perlakuan berupa pengobatan pada saat  $t$ .
- 4) Populasi *Recovered* (sembuh), dinotasikan dengan  $R(t)$  menyatakan jumlah individu yang sembuh dari infeksi pada saat  $t$ .

Sehingga total populasi dapat nyatakan sebagai  $N(t) = S(t) + I(t) + T(t) + R(t)$ .

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada pembentukan model ini adalah

1. Populasi diasumsikan terbuka artinya terdapat pertambahan penduduk dan pengurangan penduduk akibat kematian maupun kelahiran
2. Semua individu yang lahir diasumsikan masuk ke subpopulasi *Susceptible*, dengan laju kelahiran alami diasumsikan konstan.
3. Subpopulasi *Susceptible* akan menjadi subpopulasi *Infected* akibat adanya kontak. Kontak mengakibatkan bakteri (misalkan terdapat pada air dan makanan yang terkontaminasi) yang dibawa oleh orang yang terinfeksi.
4. Penularan penyakit diare diasumsikan mengikuti fungsi insidensi Holling tipe 2
5. Individu yang terinfeksi diare dapat sembuh menjadi individu yang *Recovered* jika sembuh secara alami (akibat memiliki imun yang kuat).
6. Individu yang terinfeksi diare (akut/parah) dapat sembuh setelah melalui proses *treatment*
7. Individu dalam subpopulasi *Treatment* diasumsikan tidak mempengaruhi penularan penyakit (diasumsikan dijaga dan dirawat dengan baik)
8. Kematian akibat terinfeksi penyakit diare diabaikan

Berikut diagram alir model matematika penyakit diare



Gambar 1. Diagram alir model matematika penyakit diare

Berdasarkan kompartemen pada Gambar 4.1, maka parameter-parameter yang digunakan pada model ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

- $\omega$  : Laju pertambahan individu baru akibat adanya proses kelahiran
- $\beta$  : Laju kontak efektif individu yang terinfeksi dengan individu yang sehat
- $p$  : Proporsi populasi infeksi yang akan diberikan treatment (perlakuan)
- $\gamma$  : Laju individu terinfeksi yang diberikan treatment (perlakuan)
- $\sigma$  : Laju kesembuhan akibat diberikan treatment (perlakuan)
- $\mu$  : Laju kematian alami dalam setiap subpopulasi

- $k$  : Konstanta hasil perkalian parameter  $\beta$  dengan  $t_h$ , dengan  $t_h$  adalah waktu yang diperlukan untuk menularkan virus dari satu orang yang terinfeksi kepada setiap individu sehat.
- $\frac{\beta SI}{1 + kI}$  : Banyaknya individu sehat yang tertular diare akibat kontak dengan individu yang terinfeksi (mengikuti fungsi insidensi Holling tipe dua)

Berdasarkan diagram alir pada Gambar 1, model matematika penyakit diare dengan fungsi insidensi Holling tipe dua berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \omega - \frac{\beta}{1+kI}SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{1+kI}SI - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dT}{dt} &= p\gamma I - (\sigma + \mu)T \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - p)\gamma I + \sigma T - \mu R \end{aligned} \tag{5}$$

Dari total populasi dan Persamaan (5) dapat dinyatakan bahwa

$$\frac{dN}{dt} = \omega - \mu N \tag{6}$$

Persamaan (6) memiliki solusi  $N(t) = N(0)e^{-\mu t} + \frac{\omega}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$ . Untuk waktu  $t$  yang membesar diperoleh  $N(t) = \frac{\omega}{\mu}$ . Jika  $N(0) > \frac{\omega}{\mu}$  maka  $N(t)$  monoton turun menuju kapasitas batas  $N(t) = \frac{\omega}{\mu}$  dan jika  $N(0) < \frac{\omega}{\mu}$  maka  $N(t)$  monoton naik menuju kapasitas batas  $N(t) = \frac{\omega}{\mu}$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa himpunan tertutup

$\Phi = \left\{ (S, I, T, R) \in \mathbb{R}_+^4 : S + I + T + R \leq \frac{\omega}{\mu} \right\}$  merupakan invarian positif.

Karena daerah  $\Phi$  adalah invarian positif, maka cukup untuk mempertimbangkan dinamika pada Model (5) di  $\Phi$  (Safi & Garba, 2012). Kemudian, dilanjutkan menentukan titik ekuilibrium, *basic reproduction number*, dan analisa kestabilan pada Model (5).

### Titik Ekuilibrium dan Basic Reproduction Number dari Model

Berdasarkan Definisi 1, titik ekuilibrium pada Persamaan (5) harus memenuhi kondisi  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ , yaitu

$$\omega - \frac{\beta}{1+kI}SI - \mu S = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\beta}{1+kI}SI - \mu I - \gamma I = 0 \tag{8}$$

$$p\gamma I - \sigma T - \mu T = 0 \tag{9}$$

$$(1 - p)\gamma I + \sigma T - \mu R = 0 \tag{10}$$

Dari Persamaan (8) diperoleh  $I = 0$  atau

$$S = \frac{(\mu + \gamma)(1 + kI)}{\beta} \quad (11)$$

Jika  $I = 0$  disubstitusi ke Persamaan (7) dan (9) maka berturut-turut diperoleh  $S = \frac{\omega}{\mu}, T = 0$ . Dari hasil yang diperoleh disubstitusi ke Persamaan (10) sehingga didapatkan  $R = 0$ . Jadi, dapat disimpulkan, titik ekuilibrium pertama yaitu  $E_1 = \left(\frac{\omega}{\mu}, 0, 0, 0\right)$  dan selanjutnya disebut titik ekuilibrium bebas penyakit diare. Sedangkan untuk titik ekuilibrium lainnya, ditentukan setelah menentukan *Basic reproduction number* ( $R_0$ ). *Basic reproduction number* diperoleh menggunakan metode *matrix next generation*, yang didefinisikan sebagai nilai iegen dominan dari

$$G = FV^{-1} \quad (12)$$

Berikut merupakan langkah-langkah penentuan  $R_0$  :

a. Dari Model (5) pada persamaan kedua dan ketiga dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dT}{dt} \end{pmatrix} = \mathcal{F} - \mathcal{H} \quad (13)$$

dengan  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta SI}{1+kI} \\ 0 \end{pmatrix}$  dan  $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} (\mu + \gamma)I \\ -p\gamma I + (\mu + \sigma)T \end{pmatrix}$

b. Persamaan (13), dilinearisasi diperoleh matriks Jacobian

$$D\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\beta S}{(1+kI)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } D\mathcal{H} = \begin{pmatrix} (\mu + \gamma) & 0 \\ -p\gamma & (\mu + \sigma) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, titik ekuilibrium  $E_1$  disubstitusi ke  $D\mathcal{F}$  dan  $D\mathcal{H}$ , masing-masing berturut-turut diperoleh :

$$F = \begin{pmatrix} \beta \frac{\omega}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V = \begin{pmatrix} (\mu + \gamma) & 0 \\ -p\gamma & (\mu + \sigma) \end{pmatrix}$$

c. Kemudian dicari invers matriks  $V$  yaitu  $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu+\gamma)} & 0 \\ \frac{p\gamma}{(\mu+\gamma)(\mu+\sigma)} & \frac{1}{(\mu+\sigma)} \end{pmatrix}$

d. Setelah diperoleh  $V^{-1}$ , ditentukan Matriks *Next Generation* (12), sebagai berikut

$$G = FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\omega}{\mu(\mu+\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e. Dari matriks  $G$ , dicari nilai eigen.

Persamaan karakteristik dari Matriks  $G$  adalah  $\left(\frac{\beta\omega}{\mu(\mu+\gamma)} - \lambda\right)(-\lambda) = 0$  dan diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = 0$  atau  $\lambda_2 = \frac{\beta\omega}{\mu(\mu+\gamma)}$ .

f. Jadi diperoleh *Basic Reproduction Number* dari model adalah nilai eigen dominan dari matriks  $G$ , yaitu

$$R_0 = \frac{\beta\omega}{\mu(\mu + \gamma)} \quad (14)$$

Selanjutnya, untuk menentukan titik ekuilibrium kedua digunakan Persamaan (11) dan disubstitusi ke Persamaan (7) diperoleh

$$I = I^* = \frac{\beta\omega - \mu(\mu + \gamma)}{(\mu + \gamma)(\beta + k)} = \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\beta + k)} \quad (15)$$

Persamaan (15) disubstitusi ke Persamaan (9) dan (11) berturut-turut, diperoleh

$$T = T^* = \frac{p\gamma\mu(R_0 - 1)}{(\sigma + \mu)(\beta + k)} \quad (16)$$

$$S = S^* = \frac{(\mu + \gamma)}{\beta(\beta + k)} [(\beta + k) + k\mu(R_0 - 1)] \quad (17)$$

Persamaan (15) dan (16) disubstitusi ke Persamaan (10), diperoleh

$$R = R^* = \frac{R_0 - 1}{(\beta + k)} \left[ (1 - p)\gamma + \frac{\sigma p\gamma}{(\sigma + \mu)} \right] \quad (18)$$

Jadi berdasarkan Persamaan (17), (15), (16) dan (18) diperoleh titik ekuilibrium kedua yaitu  $E_2 = (S^*, I^*, T^*, R^*)$  dan selanjutnya disebut titik ekuilibrium endemik.

### Analisa Kestabilan Model

Berdasarkan hasil dari proses linierisasi Persamaan (5), maka diperoleh matriks Jacobian. Matriks Jacobian di titik ekuilibrium ( $E_1$ ) adalah

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\beta\omega}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\omega}{\mu} - (\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & p\gamma & -(\sigma + \mu) & 0 \\ 0 & (1 - p)\gamma & \sigma & -\mu \end{pmatrix} \quad (19)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 2, diperoleh persamaan karakteristik dari Matriks Jacobian (10) yaitu  $|J(E_1) - \lambda I| = 0$ . Nilai eigen dari persamaan karakteristik ditentukan dengan menggunakan ekspansi kofaktor, diperoleh  $\lambda_{1,2} = -\mu < 0$ ,  $\lambda_3 = (\mu + \gamma)(R_0 - 1) < 0$  dan  $\lambda_4 = -(\sigma + \mu) < 0$ . Berdasarkan Teorema 3, titik ekuilibrium ( $E_1$ ) stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$ .

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium ( $E_2$ ) adalah

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^*}{1 + kI^*} - \mu & -\frac{\beta S^*}{(1 + kI^*)^2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta I^*}{1 + kI^*} & \frac{\beta S^*}{(1 + kI^*)^2} - (\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & p\gamma & -(\sigma + \mu) & 0 \\ 0 & (1 - p)\gamma & \sigma & -\mu \end{pmatrix} \quad (20)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 2, diperoleh persamaan karakteristik dari Matriks Jacobian (11) yaitu  $|J(E_2) - \lambda I| = 0$ . Nilai eigen dari persamaan karakteristik ditentukan dengan menggunakan ekspansi kofaktor, diperoleh  $\lambda_1 = -\mu < 0$ ,  $\lambda_2 = -(\sigma + \mu) < 0$  dan  $\lambda_{3,4}$  ditentukan melalui persamaan berikut

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{21}$$

dengan  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{(\beta+k(2\mu+\gamma))\mu(R_0-1)+\mu(\beta+k)}{(\beta+k)+k\mu(R_0-1)} > 0$  jika  $R_0 > 1$ , dan  $a_2 = \frac{\mu(\mu+\gamma)(R_0-1)(\beta+k\mu)}{(\beta+k)+k\mu(R_0-1)} > 0$  jika  $R_0 > 1$ .

Berdasarkan Kriteria Routh Hurwitz (Gantmacher, 2000), Persamaan (21) dapat diperlihatkan bahwa:

- (i).  $\Delta_1 = \frac{(\beta+k(2\mu+\gamma))\mu(R_0-1)+\mu(\beta+k)}{(\beta+k)+k\mu(R_0-1)} > 0$ , jika  $R_0 > 1$ .
- (ii).  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \Delta_1 a_2 > 0$ , karena  $a_2 > 0$  dan  $\Delta_1 > 0$  jika  $R_0 > 1$ .

Berdasarkan (i) dan (ii) karena  $\Delta_1 > 0$  dan  $\Delta_2 > 0$  dengan syarat  $R_0 > 1$  maka bagian riil dari nilai eigen pada Persamaan (21) bernilai negatif atau dapat dinyatakan  $Re(\lambda_{3,4}) < 0$ . Kemudian berdasarkan Teorema 3, titik ekuilibrium endemik ( $E_2$ ) stabil simtotik dengan syarat  $R_0 > 1$ .

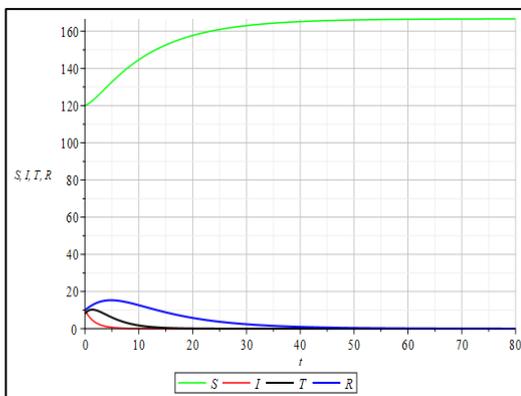
### Simulasi Model

Pada simulasi ini, diberikan nilai awal dari masing-masing subpopulasi berturut-turut  $S(0) = 200, I(0) = 10, T(0) = 5, R(0) = 5$ . Selanjutnya, disajikan nilai parameter-parameter yang digunakan untuk simulasi pada Tabel 1 berikut.

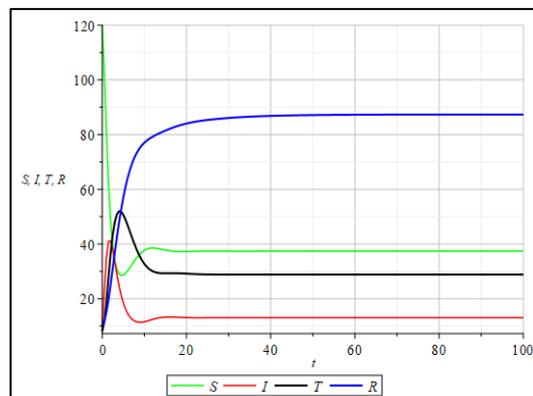
**Tabel 1.** Nilai parameter untuk simulasi model

$\omega$	$\beta$	$\gamma$	$\mu$	$k$	$p$	$\sigma$	Ket
15	0.003	0.80	0.09	0.02	0.2	0.2	$R_0 = 0,561 < 1$
15	0.03	0.80	0.09	0.02	0.2	0.2	$R_0 = 5,617 > 1$

Berikut hasil simulasi model disajikan pada Gambar 2 dan Gambar 3.



**Gambar 2.** Grafik solusi numerik model dengan  $R_0 < 1$



**Gambar 3.** Grafik solusi numerik model dengan  $R_0 > 1$

### Analisa Sensitivitas Model

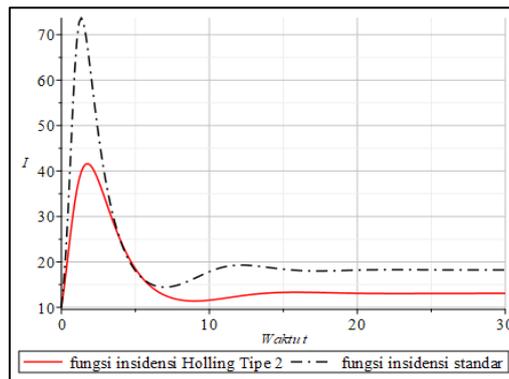
*Indeks sensitivitas normalisasi* dari *Basic reproduction number* terhadap parameter yang terlibat dihitung menggunakan Persamaan (4) dan disajikan dalam Tabel 2 berikut

**Tabel 2.** Indeks Sensitivitas  $R_0$

Indeks sensitivitas normalisasi dari $R_0$	Nilai ( $R_0 > 1$ )
$C_{\beta}^{R_0}$	1
$C_{\omega}^{R_0}$	1
$C_{\gamma}^{R_0}$	$-\frac{\gamma\mu}{(\mu + \gamma)}$ -0.0808988
$C_{\mu}^{R_0}$	$-\frac{(2\mu + \gamma)}{(\mu + \gamma)}$ -1.1011235

Nilai *Indeks sensitivitas normalisasi* pada Tabel 2 menunjukkan bahwa parameter laju kontak efektif dan laju kelahiran adalah parameter yang paling sensitif terhadap perubahan nilai  $R_0$ . Jika nilai parameter laju kontak efektif (atau laju kelahiran) meningkat maka akan berkontribusi pada peningkatan nilai  $R_0$  (atau sebaliknya). Sedangkan, jika nilai parameter laju kematian alami (atau laju individu terinfeksi yang ditreatment) meningkat maka akan berkontribusi pada penurunan nilai  $R_0$  (atau sebaliknya).

Selanjutnya, disajikan Gambar 4, grafik solusi untuk subpopulasi *Infected* pada model dengan fungsi insidensi Holling Tipe 2 dan fungsi insidensi standar.



**Gambar 4.** Grafik solusi subpopulasi *Infected* dengan fungsi insidensi Holling Tipe 2 dan fungsi insidensi standar

## PENUTUP

Berdasarkan dari hasil analisa model yang terbentuk, penyebaran penyakit diare dengan fungsi insidensi Holling tipe 2, penyakit akan menyebar jika *Basic reproduction number* lebih dari satu. Adanya treatment dan memperhatikan laju penularan penyakit dapat menghambat/mengurangi jumlah individu yang terinfeksi. Selanjutnya jika diberi *treatment* dan laju penularan penyakit mengikuti fungsi insidensi Holling tipe 2 maka akan lebih efektif (menurunkan jumlah infeksi) jika dibandingkan dengan fungsi insidensi standar.

## REFERENSI

- Astuti, V., Yulida, Y., & Thresye. (2021). Model Matematika Penyebaran Penyakit Diare dengan adanya Treatment. *Jurnal Epsilon*, 15(1), 46–57.
- Bellomo, N., & Preziosi, L. (1995). *Modelling mathematical Methods and Scientific Computation*. Springer-Verlag New York Inc.
- Bonyah, E., Twagirumukiza, G., & Gambrah, P. P. (2019). Mathematical analysis of diarrhoea model with saturated incidence rate. *Open Journal of Mathematical Sciences*, 3(2019)(1), 29–39. <https://doi.org/10.30538/oms2019.0046>
- Braun, M. (1992). *Differential Equation and Their Applications-Fourth Edition*. Springer-Verlag, New York.
- Chaturvedi, O., Lungu, E., Jeffrey, M., & Masupe, S. (2018). Rotavirus diarrhea – An analysis through epidemic modeling. In *Journal of Biomedical Engineering and Informatics* (Vol. 4, Issue 2). <https://doi.org/10.5430/jbei.v4n2p21>
- Chitnis, N., Hyman, J. M., & Cushing, J. M. (2008). *Determining Important Parameters in the Spread of Malaria*. 70, 1272–1296. <https://doi.org/10.1007/s11538-008-9299-0>
- Driessche, P. Van Den, & Watmough, J. (2005). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Edward, S., & Nyerere, N. (2015). *A Mathematical Model for the Dynamics of Cholera with Control Measures*. 4(2), 53–63. <https://doi.org/10.11648/j.acm.20150402.14>
- Farlow, S. J. (1994). *An Introduction to Differential Equation and Their Applications*. Dover Publications, United States of America.
- Gantmacher, F. (2000). *The Theory Of Matrices*. Chelsea Publishing Company.
- Hethcote, H. W. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases (SIAM REVIEW). *SIAM Review*, 42(4), 599–653.
- Jannah, M., Ahsar Karim, M., & Yulida, Y. (2021). Analisis Kestabilan Model Seir Untuk Penyebaran Covid-19 Dengan Parameter Vaksinasi. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 15(3), 535–542. <https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss3pp535-542>

- Karim, M. A., & Yulida, Y. (2021). Analisis Kestabilan dan Sensitivitas pada Model Matematika SEIRD dari Penyebaran Covid-19: Studi Kasus di Kalimantan Selatan. *Media Bina Ilmiah*, 16(5), 7003–7012.
- Lasisi, N. O., Akinwande, N. I., & Abdulrahman, S. (2020). Optimal control and effect of poor sanitation on modelling the acute diarrhea infection. *Journal of Complexity in Health Sciences*, 3(1), 91–103. <https://doi.org/10.21595/chs.2020.21409>
- Majeed, S. N. (2016). Stability analysis of SIR holling type II infectious epidemic model with treatment failure rate. *Mathematical Theory and Modeling*, 6(2), 50–60. [www.iiste.org](http://www.iiste.org)
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, New York.
- Perko, L. (2001). *Differential Equation and Dynamics*. Springer Verlag New York.
- Ross, S. L. (2004). *Differential Equation* (Third). John Wiley & Sons, New Delhi.
- Safi, M. A., & Garba, S. M. (2012). Global stability analysis of SEIR model with holling type II incidence function. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2012, 1–8. <https://doi.org/10.1155/2012/826052>
- Selviana, S., Trisnawati, E., & Munawarah, S. (2017). Faktor-Faktor Yang Berhubungan Dengan Kejadian Diare Pada Anak Usia 4-6 Tahun. *Jurnal Vokasi Kesehatan*, 3(1), 28. <https://doi.org/10.30602/jvk.v3i1.78>
- Yulida, Y. (2019). *Persamaan Diferensial Biasa*. CV. IRDH, Malang.
- Yulida, Y., & Karim, M. A. (2020). Pemodelan Matematika Penyebaran COVID-19 di Provinsi Kalimantan Selatan. *Jurnal Binawakya*, 14(10), 3257–3264. <http://ejurnal.binawakya.or.id/index.php/MBI/article/view/572>
- Yulida, Y., & Karim, M. A. (2021). Model Matematika SEIRD (Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, Dan Death) Untuk Penyebaran Penyakit ISPA. *Media Bina Ilmiah*, 15(7), 4815–4824.