TES FORMAL MODUL PROJEKTIF DAN MODUL BEBAS ATAS RING OPERATOR DIFERENSIAL

Na'imah Hijriati
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru

ABSTRAK

Misalkan $D = K[d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n]$ operator diferensial linier dengan koefisien di *K*, yang memenuhi $\forall\ a \in K$; $d_i a = ad_i + \partial_i a$. *D* adalah ring operator diferensial linier dengan sifat antara lain: *D* tidak memuat pembagi nol, tidak komutatif, dan untuk setiap $d_i, d_j \in D$, $i, j = 1, \ldots, n$ dan untuk setiap $a, b \in K$ berlaku $ad_i(bd_j) = abd_i d_j + a(\partial_i b)d_j$.

Misalkan *M* adalah suatu modul atas *D* yang dibentuk dari suatu sistem linier diferensial biasa (OD) *time-varying* atau sistem linier diferensial parsial (PD) terkendali. Menunjukkan *M* suatu modul projektif atau suatu modul bebas digunakan suatu tes formal. Tes formal yang digunakan sangat bergantung pada karakteristik dari modul tersebut, yaitu Untuk modul projektif, tes formal yang digunakan tergantung pada kesurjektifan dari operator tersebut. Sedangkan untuk modul bebas harus atas suatu daerah ideal utama.

Kata Kunci : *Modul Atas Operator Diferensial, Integrabilitas Formal, Teori Kendali.*

1. PENDAHULUAN

Misalkan *D* ring operator diferensial linier atas suatu lapangan dan $\gamma = \{y_k \mid k = 1,2,\ldots,m\}$ indeterminates diferensial, maka $D\gamma = Dy_1 + Dy_2 + \cdots + Dy_m$ adalah modul kiri atas *D* yang dibangun oleh himpunan γ. Dan misalkan $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ operator PD linear, dengan F_0, F_1 adalah dua vector bundle di manifold *X* yang berdimensi *n*, dengan koordinat lokal $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dengan kata lain $\mathcal{D}_1$ adalah operator PD linear yang bekerja pada section F_0, yaitu bekerja pada fungsi $\eta : X \to F_0$. Didefinisikan solusi dari aturan pengaitan $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ sebagai berikut $\eta \in F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1\eta = 0$.

Hubungan antara setiap operator $\mathcal{D}_1 : \eta \to \zeta$ dengan modul *M* atas *D* adalah $M = [\eta]/[\mathcal{D}_1\eta]$ dan di katakan bahwa operator $\mathcal{D}_1$ menentukan modul *M* atas *D*. Karena diketahui beberapa jenis dari modul adalah modul projektif dan modul bebas, maka penelitian ini mempelajari tes formal untuk menentukan suatu modul atas ring operator diferensial merupakan modul projektif atau modul bebas.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Teori Modul

Berikut ini diberikan definisi modul kiri atas suatu ring :

Definisi 2.1.1(Adkins,1992)

Misalkan R sebarang ring dengan elemen satuan. Modul kiri M atas R adalah suatu grup abelian M yang dilengkapi dengan pemetaan pergandaan skalar :

$$. : R \times M \rightarrow M \text{ , } (a,m) \mapsto am$$

yang memenuhi aksioma – aksioma berikut :

i. $a(m + n) = am + an$
ii. $(a + b)m = am + bm$
iii. $(ab)m = a(bm)$
iv. $1m = m$

untuk setiap $m,n \in M$ *dan* $a,b,1 \in R$.

Selanjuntnya dalam penelitian ini modul kiri dituliskan hanya dengan modul dan ring dengan elemen satuan hanya dituliskan dengan ring.

Definisi 2.1.1 menunjukkan bahwa modul merupakan generalisasi dari ruang vektor, sehingga beberapa definisi dan sifat yang ada pada modul merupkan generalisasi dari definisi dan sifat yang ada pada ruang vektor. Diantaranya adalah homomorfisma modul, submodul dan basis yang merupakan generalisasi dari transformasi linier, subruang dan basis pada ruang vektor.

Berikut adalah definisi dari homomorfisma modul :

Definisi 2.1.2(Adkins,1992)

Misalkan R ring dan misalkan M dan N modul-modul atas R. Pemetaan $f : M \rightarrow N$ *disebut homomorfisma modul atas R, jika memenuhi :*

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$ *untuk setiap* $m,n \in M$
2. $f(am) = af(m)$ *untuk setiap* $a \in R$ dan $m \in M$

Definisi 2.1.3 (Adkins, 1992)

Misalkan M dan N modul-modul atas ring R dan $f : M \rightarrow N$ *homomorfisma modul atas ring R.*

i. *f disebut monomorfisma jika f injektif*
ii. *f disebut epimorfisma jika f surjektif*
iii. *f disebut isomorfisma jika f bijektif*

Selanjutnya didefinisikan modul bebas torsi, modul bebas dan modul projektif beserta masing-masing sifat-sifatnya dan hubungan antara modul tersebut. Berikut didefinisikan modul bebas torsi:

Definisi 2.1.4 (Adkins, 1992)

Misalkan R daerah intergral, dan M modul atas R. Elemen $x \in M$ *diebut* ***elemen torsi*** *jika terdapat* $a \neq 0 \in R$ *sedemikian sehingga* $ax = 0$. *Selanjutnya himpunan semua elemen torsi di M dituliskan dengan* M_T. *Jika* $M_T = \{0\}$, *maka M disebut* ***modul bebas torsi*** *dan jika* $M_T = M$ *maka M disebut* ***modul torsi.***

Sebelum mendefinisikan modul bebas, terlebih dahulu diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan modul bebas sebagai berikut :

Definisi 2.1.5 (Adkins, 1992)

Misalkan R adalah ring dan misalkan M modul atas R.

Himpunan bagian $X \subseteq M$ *disebut* ***bebas linear*** *(independen linear), jika berlaku*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

untuk setiap $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ *dan untuk setiap* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$

Definisi 2.1.6 (Adkins, 1992)

Misalkan M modul atas R. $X \subseteq M$ *disebut* ***basis*** *dari M, jika X membangun M dan bebas linear.*

Selanjutnya didefinisikan modul bebas sebagai berikut :

Definisi 2.1.7 (Adkins, 1992)
Misalkan M modul atas R. M disebut ***modul bebas*** *jika M mempunyai basis*.

Hubungan modul bebas torsi dengan modul bebas dinyatakan sebagai berikut :

Teorema 2.1.8 (Hartley, 1994)
Jika R adalah daerah ideal utama dan M modul bebas torsi atas R yang dibangun berhingga maka M modul bebas

Definisi modul projektif adalah :

Definisi 2.1.7(Rotman, 1979)
Misalkan P modul atas ring R. P disebut ***modul projektif*** *jika setiap untuk setiap epimorfisma* $\alpha : M \to N$ *dan untuk sebarang homomorfisma* $\beta : P \to N$, *terdapat* $\gamma : P \to M$ *sedemikian sehingga* $\alpha \circ \gamma = \beta$, *dengan M dan N modul-modul atas ring R.*

2.2. Operator Diferensial

Berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan operator diferensial, yang mendasari kontruksi dari tes formal dalam menentukan modul projektif dan modul bebas :

Definisi 2.2.1 (Pommaret&Quadrat, 1998)
Misalkan $\mathcal{D}_1$ *operator diferensial parsial linear, maka*

1. *operator* $\mathcal{D}_1$ *disebut formally injektive jika* $\mathcal{D}_1\eta = 0 \Rightarrow \eta = 0$
2. *operator* $\mathcal{D}_1$ *disebut formally surjective jika terdiferensial secara independen, yaitu jika* $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$ *tidak mempunyai kondisi kompetibel atau dengan kata lain tidak terdapat operator* $\mathcal{D}_2$, *sedemikian sehingga jika* $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$ *maka* $\mathcal{D}_2\zeta = 0$

Definisi 2.2.2 (Pommaret&Quadrat, 1998)
Misalkan $[\mathcal{D}_i\ , i = 0, \ldots, l]$ *barisan operator differensial*. $[\mathcal{D}_i\ , i = 0, \ldots, l]$ *disebut eksak lokal jika* ker $\mathcal{D}_{i+1}$ = im $\mathcal{D}_i$ *untuk* setiap $i = 0, \ldots, l$

Akibatnya diperoleh sifat berikut :

Sifat 2.2.3 (Pommaret&Quadrat, 1998)
Misalkan $[\mathcal{D}_i\ , i = 0, \ldots, l]$ *barisan operator differensial*. *Jika*. $[\mathcal{D}_i\ , i = 0, \ldots, l]$ *eksak lokal maka* $\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$ *untuk setiap* $i = 0, \ldots, l$.

Bukti :
Diketahui $[\mathcal{D}_i\ , i = 0, \ldots, l]$ eksak lokal
Akan ditunjukkan $\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$
Misalkan $\mathcal{D}_i : F_{i-1} \to F_i$ dan $\mathcal{D}_{i+1} : F_i \to F_{i+1}$, untuk $i = 0, \ldots, l$
Diketahui $[\mathcal{D}_i\ , i = 0, \ldots, l]$ eksak lokal, maka ker $\mathcal{D}_{i+1}$ = im $\mathcal{D}_i$
Ambil sebarang $x \in F_{i-1}$, maka

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i)(x) &= \mathcal{D}_{i+1}(\mathcal{D}_i(x)) \\
&= \mathcal{D}_{i+1}(y) \qquad \text{untuk } y \in \text{im } \mathcal{D}_i
\end{aligned}
$$

karena ker $\mathcal{D}_{i+1}$ = im $\mathcal{D}_i$ untuk setiap $i = 0, \ldots, l$, maka $\mathcal{D}_{i+1}(y) = 0$ untuk $y \in$ im $\mathcal{D}_i$
Jadi $\mathcal{D}_{i+1} \circ \mathcal{D}_i = 0$ untuk setiap $i = 0, \ldots, l$. ■

Selanjutnya didefinisikan eksak formal sebagai berikut :

Definisi 2.2.4 (Pommaret&Quadrat, 1998)

Misalkan [$\mathcal{D}_i$, i = 0, …, l] *barisan operator differensial*. *Barisan* [$\mathcal{D}_i$, i = 0, …, l] *disebut eksak formal (formally exact) jika setiap operator membangun semua kondisi kompetibel dari operator sebelumnya*.

Berdasarkan Definisi 2.2.4 diperoleh sifat berikut :

Sifat 2.2.5 (Pommaret&Quadrat, 1998)

Misalkan $\mathcal{D}$ operator differensial, maka

1. Jika barisan differensial $0 \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ adalah eksak formal maka operator $\mathcal{D}$ disebut injektif
2. Jika barisan differensial $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \to 0$ adalah eksak formal maka operator $\mathcal{D}$ disebut surjektif

Bukti:

1. diketahui $0 \to E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ adalah eksak formal
   Akan dibuktikan $\mathcal{D}$ injektif.
   Bukti :

   Misalkan $\mathcal{D}$' operator differensial dari 0 ke E, karena diketahui $0 \xrightarrow{\mathcal{D}'} E \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ eksak formal, maka operator $\mathcal{D}$ membangun semua kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}$' atau dengan kata lain $\mathcal{D}'0 = e \Rightarrow \mathcal{D}e = 0$, untuk $e \in E$. Ambil sebarang x dan $y \in E$, misalkan $\mathcal{D}x = \mathcal{D}y$ maka :
   $\mathcal{D}x = \mathcal{D}y \Leftrightarrow \mathcal{D}x - \mathcal{D}y = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}(x - y) = 0 \Rightarrow \mathcal{D}(x - y) = 0$ adalah kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}'0 = x - y$. Karena $\mathcal{D}'0 = 0$, akibatnya $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
   Jadi terbukti $\mathcal{D}$ injektif.
2. diketahui $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \to 0$ adalah eksak formal
   Akan dibuktikan $\mathcal{D}$ surjektif

   Misalkan $\mathcal{D}$' operator differensial dari F ke 0, karena diketahui $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ eksak formal, maka operator $\mathcal{D}$' membangun semua kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}$ atau dengan kata lain $\mathcal{D}e = f \Rightarrow \mathcal{D}'f = 0$, untuk $e \in E$ dan $f \in F$.
   Ambil sebarang $f \in F$, karena $\mathcal{D}'g = 0$ untuk setiap $g \in F$, maka $\mathcal{D}'f = 0$ akibatnya terdapat $e \in E$ sedemikian sehingaa $\mathcal{D}e = f \Rightarrow \mathcal{D}'f = 0$.
   Jadi terbukti $\mathcal{D}$ surjektif. ■

Selanjutnya didefinisikan barisan diferensial split sebagai berikut :

Definisi 2.2.6 (Pommaret&Quadrat, 1998)

Barisan eksak formal $0 \to E \xrightarrow{\mathcal{D}_0} F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \to 0$ *disebut barisan diferensial split eksak jika memenuhi salah satu sifat ekivalen berikut* :

1. *terdapat operator* $\mathcal{P}_1 : F_0 \to F_1$ *sedemikian sehingga* $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$,
2. *terdapat operator* $\mathcal{P}_0 : F_0 \to E$ *sedemikian sehingga* $\mathcal{D}_0 \circ \mathcal{P}_0 = id_E$
3. $F_0 \cong E \oplus F_1$

Sistem diferensial linier yang dibahas pada penelitian ini adalah sistem yang terintegral secara formal dengan involutive simbol, yaitu barisan dimulai dengan $\mathcal{D}_1$ dan setiap operator medeskripsikan secara tepat kondisi kompetibel dari kondisi yang terdahulu dan berhenti ketika lebih dari n + 1 operator, dimana n adalah dimensi dari X. Barisan

$$F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} F_{n+1} \to 0$$

adalah formal eksak dan barisan ini biasanya disebut barisan Janet dari $\mathcal{D}_1$

Berikut adalah definisi dari formal adjoint dari suatu operator :

Definisi 2.2.7 (Pommaret&Quadrat, 1998)

Misalkan $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ *operator diferensial linear dengan adjoint formalnya* $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \to \tilde{F}_0$ *. Didefinisikan aturan formal yang ekivalen dengan integration dari masing-masing bagian sebagai berikut* :

1. *matriks adjoint (zero order operator) adalah matriks transposenya*
2. *adjoint dari* ∂_i *adalah -* ∂_i
3. *dua operator linear PD, yaitu P, Q yang dapat dikomposisikan, maka* $\widetilde{P \circ Q} = \tilde{Q} \circ \tilde{P}$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Tes Formal Module Projektif

Misalkan $\mathcal{D}_1$operator surjektif dengan adjoint injektif $\tilde{\mathcal{D}}_1$. Jika $\tilde{\mathcal{D}}_1$ operator injektif yang berada diantara konsekuensi diferensial dari persamaan $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$, maka dapat dicari $\tilde{\mathcal{P}}_1$ dengan membawa $\tilde{\mathcal{D}}_1$ ke integrability formal, sedemikian sehingga diperoleh $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1$ = $id_{\tilde{F}_1}$, dimana $id_{\tilde{F}_1}$ adalah operator identitas dari $\tilde{F}_1$ dan operator $\tilde{\mathcal{P}}_1$ adalah invers kiri dari $\tilde{\mathcal{D}}_1$, kemudian dualisasikan $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1$ = $id_{\tilde{F}_1}$, maka diperoleh $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$, atau dengan kata lain $\mathcal{D}_1$ invers kanan $\mathcal{P}_1$. Hal ini ekivalen dengan mengatakan modul M atas D ditentukan oleh operator surjektif $\mathcal{D}_1$ adalah modul projektif atas D.

Akibatnya diperoleh teorema berikut ini :

Teorema 3.1.1

Operator diferensial surjektif $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ *menentukan modul projektif atas D jika dan hanya jika adjointnya injektif, yaitu jika terdapat* $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ *sedemikian sehingga* $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$.

Bukti :

$\Rightarrow$

Diketahui operator diferensial surjektif $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan modul projektif atas *D*.

Akan ditunjukkan adjointn D_1 injektif

Diketahui operator diferensial surjektif $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan modul projektif atas *D* maka terdapat operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$

Dualkan $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$ diperoleh $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = id_{\tilde{F}_1}$, dimana $id_{\tilde{F}_1}$ adalah operator identitas dari $\tilde{F}_1$. Jadi $\tilde{\mathcal{P}}_1$ adalah invers kiri dari $\tilde{\mathcal{D}}_1$ atau dengan kata lain jika $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$, maka $\lambda = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mu$, sehingga jika $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$ ($\mu = 0$), maka $\lambda = 0$. Jadi $\tilde{\mathcal{D}}_1$ injektif

$\Leftarrow$

Diketahui operator diferensial surjektif $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ dan adjointn $\mathcal{D}_1$ injektif

Akan ditunjukkan operator diferensial $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif atas *D*.

operator diferensial $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif atas *D* jika terdapat operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$.

Diketahui adjointn $\mathcal{D}_1$, yaitu $\tilde{\mathcal{D}}_1 : \tilde{F}_1 \to \tilde{F}_0$ injektif, yaitu jika $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = 0$ maka $\lambda = 0$, sehingga terdapat $\tilde{\mathcal{P}}_1 : \tilde{F}_0 \to \tilde{F}_1$, dimana jika $\tilde{\mathcal{D}}_1 \lambda = \mu$, maka $\lambda = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mu$. Akibatnya $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = id_{\tilde{F}_1}$. Dengan mendualkan $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = id_{\tilde{F}_1}$ diperoleh

$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1}$ atau dengan kata lain operator diferensial $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif atas *D*. ■

Selanjutnya diberikan sifat dari operator diferensial yang menentukan modul projektif atas *D*

Sifat 3.1.2

Misalkan $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ *operator yang tidak surjektif*

Operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ *menentukan modul projektif atas D jika dan hanya jika terdapat operator* $\mathcal{P}_2 : F_2 \to F_1$ *sedemikian sehingga* $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1}$.

Bukti :

($\Rightarrow$)

Diketahui $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ operator yang tidak surjektif dan operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan Modul projektif atas *D*

Akan dibuktikan jika terdapat operator $\mathcal{P}_2 : F_2 \to F_1$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1}$.

Diketahui $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan modul projektif atas D maka terdapat operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{im\mathcal{D}_1}$.

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{im\mathcal{D}_1} \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (id_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1) \circ \mathcal{D}_1 = 0 \qquad (3.1)$$

Diketahui juga $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ operator yang tidak selalu surjektif, maka terdapat operator $\mathcal{D}_2$, sedemikian sehingga jika $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$ maka $\mathcal{D}_2\zeta = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = 0$. Sehingga berdasarkan (3.1), haruslaha $(id_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1)$ merupakan faktorisasi dari $\mathcal{D}_2$. Akibatnya terdapat operator $\mathcal{P}_2$ sedemikian sehingga diperoleh :

$$id_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1}.$$

$(\Leftarrow)$

Diketahui $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ operator yang tidak surjektif dan terdapat operator $\mathcal{P}_2 : F_2 \to F_1$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1}$.

Akan dibuktikan $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan modul projektif atas D

Diketahui $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ operator yang tidak selalu surjektif, maka terdapat operator $\mathcal{D}_2$, sedemikian sehingga jika $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$ maka $\mathcal{D}_2\zeta = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = 0$.

Diketahui juga terdapat operator $\mathcal{P}_2 : F_2 \to F_1$ sedemikian sehingga

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1} \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1} - \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{F_1} \text{ modulo } \mathcal{D}_2 = id_{im\mathcal{D}_1}.$$

Jadi terdapat $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 = id_{im\mathcal{D}_1}$.

Jadi $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif atas D ■

Akibat dari Sifat 3.1.2, maka diperoleh karakteristik dari modul projektif sebagai berikut :

Teorema 3.1.3

Operator $\mathcal{D}_1 : F_0 \to F_1$ menentukan modul projektif atas D jika terdapat operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$. Operator $\mathcal{P}_1$ disebut operator lift

Bukti

Diketahui $\mathcal{D}_1$ bukan operator yang surjektif dan terdapat operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$

Akan dibuktikan $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif atas D.

Diketahui terdapat operator $\mathcal{P}_1 : F_1 \to F_0$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$, maka berdasarkan Sifat 3.1.2 terdapat operator $\mathcal{P}_2$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1}$. Akibatnya berdasarkan Sifat 3.1.2 $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif atas D. ■

Selanjutnya berdasarkan Sifat 3.1.2, diperoleh

$$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1} \Leftrightarrow \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = id_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 \circ (id_{F_1} - \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 \circ id_{F_1} - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1)$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 - 0 \circ \mathcal{P}_1$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 - 0$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2$$

maka beradasarkan Teorema 3.1.3 $\mathcal{D}_2$ menentukan modul projektif atas *D*. Selanjutnya dengan mendualkan $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$, diperoleh $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_1$, jadi $\tilde{\mathcal{D}}_1$ juga menentukan modul projektif atas *D*, dan diperoleh juga $\tilde{\mathcal{D}}_2 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = 0$ dan
$\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 + \tilde{\mathcal{D}}_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}_2 = id_{\tilde{F}_1}$.

Indentitas pertama menunjukkan im $\tilde{\mathcal{D}}_2 \subseteq$ ker $\tilde{\mathcal{D}}_1$, selanjutnya jika diambil $\lambda \in$ ker $\tilde{\mathcal{D}}_1$, maka identitas kedua menunjukkan bahwa $\tilde{\mathcal{D}}_2 (\tilde{\mathcal{P}}_2 \lambda) = \lambda$, jadi $\lambda \in$ im $\tilde{\mathcal{D}}_2$. Akibatnya im $\tilde{\mathcal{D}}_2$ = ker $\tilde{\mathcal{D}}_1$.

Dengan demikian diperoleh barisan lokal eksak berikut :

$$\tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2} \tilde{F}_2$$

Jadi operator $\tilde{\mathcal{D}}_1$ secara tepat membangun kondisi kompetibel dari operator $\tilde{\mathcal{D}}_2$ atau dengan kata lain $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 = 0$.

Sebaliknya jika $\tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2} \tilde{F}_2$ lokal eksak maka $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 = 0$, dan $\mathcal{D}_2$ surjektif dengan $\tilde{\mathcal{D}}_2$ injektif, maka $\mathcal{D}_2$ menentukan modul projektif atas *D* sehingga terdapat operator P_2 sedemikian sehingga $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2$. sehingga dengan mendualkan $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2$, maka diperoleh $\tilde{\mathcal{D}}_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}_2 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 = \tilde{\mathcal{D}}_2 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}_2 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 - \tilde{\mathcal{D}}_2 = 0 \Leftrightarrow (id_{\tilde{F}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_2 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2) \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 = 0$.

Karena $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2 = 0$, maka $id_{\tilde{F}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_2 \circ \tilde{\mathcal{D}}_2$ harus merupakan faktorisasi dari $\tilde{\mathcal{D}}_1$, sehingga terdapat $\tilde{\mathcal{P}}_1$ sedemikian sehingga $\tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 + \tilde{\mathcal{D}}_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}_2 = id_{\tilde{F}_1} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_1$

Akibatnya dengan mendualkan $\tilde{\mathcal{D}}_1 \circ \tilde{\mathcal{P}}_1 \circ \tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_1$ maka diperoleh
$\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1$ atau dengan kata lain $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif.
Jadi untuk menunjukkan $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif, cukup ditunjukkan terdapat barisan formal eksak dengan dual dari operator terakhirnya adalah injektif

Berdasarkan keterangan di atas, tes formal untuk mencek apakah modul *M* yang ditentukan oleh operator $\mathcal{D}_1$ adalah modul projektif atas *D* dimana operator $\mathcal{D}_1$ tidak surjektif sebagai berikut :

Tes formal modul projektif

1. mengkonstruksi barisan Jenet yang diawali dengan operator $\mathcal{D}_1$
2. lakukan pencekan jika adjoint dari operator terakhir injektif atau tidak
3. kamudian lakukan pencekan jika barisan yang terurut mundur, dibuat dengan adjoint $\mathcal{D}_1$ dari barisan Janet adalah barisan formal eksak

Selanjutnya akan dijelaskan bagaimana cara menghitung *lift*-operator $\mathcal{P}_1$. Misalkan $\mathcal{P}_1$ adalah operator yang mendefinisikan modul projektif atas D, maka terdapat dua barisan lokal eksak berikut :

$$F_0 \xrightarrow{\mathcal{D}_1} F_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_n} F_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{n+1}} F_{n+1} \to 0$$
$$\tilde{F}_0 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_1} \tilde{F}_1 \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_2} \ldots \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_n} \tilde{F}_n \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}_{n+1}} \tilde{F}_{n+1} \leftarrow 0$$

Misalkan $\mathcal{D}_{n+1}$ adalah operator surjektif dengan adjoint $\tilde{\mathcal{D}}_{n+1}$ yang injektif, maka terdapat operator

$\mathcal{P}_{n+1} : F_{n+1} \to F_n$ sedemikian sehingga $\mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} = id_{F_{n+1}} \Rightarrow \mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_{n+1}$.

Selanjutnya dibentuk $Q_n = id_{F_n} - \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1}$, maka diperoleh

$\mathcal{D}_{n+1} \circ Q_n = \mathcal{D}_{n+1} - \mathcal{D}_{n+1} \circ \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_{n+1} - \mathcal{D}_{n+1} = 0$.

Jadi $\tilde{Q}_n \circ \tilde{\mathcal{D}}_{n+1} = 0$, yang menyatakan bahwa $\tilde{Q}_n$ adalah faktorisasi melalui $\tilde{\mathcal{D}}_n$, yaitu $\tilde{Q}_n = \tilde{\mathcal{P}}_n \circ \tilde{\mathcal{D}}_n \Rightarrow Q_n = \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_{n+1} \circ \mathcal{D}_{n+1} = id_{F_n} \Rightarrow \mathcal{D}_n \circ \mathcal{P}_n \circ \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n$.

Dengan cara yang sama, dapat dicari $\mathcal{P}_i$ untuk $i \in [1,\ldots,n]$, yang memenuhi

$\mathcal{D}_i \circ \mathcal{P}_i \circ \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i$.

Akibatnya *lift*-operator $\mathcal{P}_i$ dapat dihitung sebagai berikut :

1. menentukan operator $\tilde{\mathcal{P}}_i$ sedemikian sehingga $\tilde{\mathcal{P}}_i \circ \tilde{\mathcal{D}}_i = id_{\tilde{F}_i}$ dan tentukan adjointnya ($\mathcal{P}_i$) untuk $i = n+1,\ldots,2$
2. menentukan $Q_{i-1} = id_{F_{i-1}} - \mathcal{P}_i \circ \mathcal{D}_i$ dan $\tilde{Q}_{i-1}$
3. sama dengan sebelumnya $\tilde{Q}_{i-1}$ harus merupakan faktorisasi melalui $\tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ dan tentukan $\tilde{\mathcal{P}}_{i-1}$ sedemikian sehingga $\tilde{Q}_{i-1} = \tilde{\mathcal{P}}_{i-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ dan dualisasikan, sehingga diperoleh $\mathcal{P}_{i-1}$.

3.2. Tes Formal Modul Bebas

Pada pembahasan berikut D adalah daerahi ideal utama, maka modul bebas torsi atas D adalah modul bebas atas D

Berikut adalah beberapa teorema yang bermanfaat untuk menunjukkan operator diferensial menentukan modul bebas :

Teorama 3.2.1

Suatu sistem kendali time varying OD linear yang surjektif dikatakan terkendali jika dan hanya jika adjointya injektif.

Bukti :

Jika D adalah principal ring, maka modul bebas torsi M atas D adalah modul bebas M atas D dan modul bebas M atas D adalah modul projektif atas D, sehingga sistem kendali OD linear terkendali jika dan hanya jika M module projektif atas D. Diketahui operator $\mathcal{D}_1$ surjektif, maka $\mathcal{D}_1$ menentukan module projektif M atas D jika dan hanya jika adjointnya yaitu $\tilde{\mathcal{D}}_1$ injektif.

Jadi terbukti sistem kendali time varying OD linear yang surjektif terkendali jika dan hanya jika adjointya injektif maka $\mathcal{D}_1$ menentukan modul projektif M atas D dan sistem terkendali. ■

Teorema 3.2.2

Operator $\mathcal{D}_1$ menentukan module bebas M atas D jika dan hanya jika terdapat parameter injektif dari $\mathcal{D}_1$.

Bukti :

$\Leftarrow$

Misalkan $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ adalah parameter dari $\mathcal{D}_1\eta = \zeta$. Jika $M = {}^{[\eta]}\!\big/_{[\mathcal{D}_1\eta]}$ maka $M \subseteq D\xi$.

Selanjutnya jika $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ paremeter injektif dari $\mathcal{D}_1$, maka terdapat invers kiri $\mathcal{P}_0$ dari $\mathcal{D}_0$ sedemikian sehingga

$\xi = \mathcal{P}_0 \circ \mathcal{D}_0\xi$. Karena $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ maka $\xi = \mathcal{P}_0\eta$, sehingga $D\xi \subseteq M$. Akibatnya $M = D\xi$.

Diketahui jika operator $\mathcal{D}_1$ parametrizable maka sistem terkendali, dan sistem terkendali jika operator $\mathcal{D}_1$ menentukan modul bebas torsi, sehingga *M* adalah modul bebas torsi atas *D*. Akibatnya karena *D* daerah ideal utama maka *M* adalah modul bebas atas *D*

$\Rightarrow$

Diketahui $\mathcal{D}_1$ menentukan *D*-module bebas *M*, maka $\mathcal{D}_1$ menentukan *D*-module bebas torsi *M*. Sehingga selalu dapat ditemukan operator $\mathcal{D}_0$ sedemikian sehingga semua kondisi kompetibel dari $\mathcal{D}_0\xi = \eta$ hanya dibangun oleh $\mathcal{D}_1\eta = 0$ atau dengan kata lain $\mathcal{D}_1$ paramatrizable dengan parameternya adalah $\mathcal{D}_0$. Selanjutnya karena $\mathcal{D}_1$ menentukan *D*-module bebas torsi maka sistem terkendali, akibatnya berdasarkan Teorema 3.2.1, adjoint dari $\mathcal{D}_1$, yaitu $\mathcal{D}_0$ adalah operator injektif.

Jadi terbukti terdapat parameter injektif dari $\mathcal{D}_1$. ■

4. KESIMPULAN

Tes formal yang digunakan untuk menunjukkan suatu modul atas operator diferensial projektif atau bebas, sangat bergantung pada karekteristik dari operator diferensial. Untuk modul projektif, tes formal yang digunakan tergantung pada kesurjektifan dari operator tersebut. Sedangkan untuk modul bebas harus atas suatu daerah ideal utama.

Tes formal modul projektif adalah dengan mengkonstruksi barisan Jenet yang diawali dengan operator $\mathcal{D}_1$; lakukan pencekan jika adjoint dari operator terakhir injektif atau tidak; kamudian lakukan pencekan jika barisan yang terurut mundur, dibuat dengan adjoint $\mathcal{D}_1$ dari barisan Janet adalah barisan formal eksak. Sedangkan tes formal modul bebas adalah dengan menentukan parameter injektif dari operator diferensial yang menentukan modul bebas.

5. DAFTAR PUSTAKA

Adkins, A.W. and S.H Weintraub, 1992, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.

Fraleigh, J.B., 2000, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wasley Publishing Company, New York

Hartley, B. and T.O. Hawkes, 1994, *Rings, Modules and Linier Algebra*, Chapman-Hall, London

Pommaret, J.F. and A. Quadrat, 1998, Applicable Algebra in Engineering, Comunication and Computing: *Generalized Bezout Identity*, volume 9, 91-116, Springer-Verlag