Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.16 No.2 (Desember 2022) Hal. 198-210

SIFAT-SIFAT KOSET FUZZY DARI SUBGRUP FUZZY SUATU GRUP

Muhammad Rifaldy Yanwar, Saman Abdurrahman*, Na'imah Hijriati

Program Studi Matematika Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A Yani Km 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
**Email:* saman@ulm.ac.id

ABSTRACT

The concept of fuzzy sets represents a problem that is difficult to express with a crisp set. Then, research on fuzzy sets was combined with the field of algebra which gave birth to the concept of fuzzy algebra. One of the research in fuzzy algebra is the fuzzy group. This research provided ideas for other researchers, such as examining fuzzy cosets and forming quotient groups from normal fuzzy subgroups. Fuzzy cosets in the most recent research included fuzzy left cosets, fuzzy right cosets, and fuzzy middle cosets. The purpose of this research is to prove the properties of fuzzy left cosets, fuzzy right cosets, and fuzzy middle cosets, as well as to examine the relationship between fuzzy left cosets and fuzzy right cosets with fuzzy middle cosets from a fuzzy subgroup of a group. The procedure of this research began with studying the basic concepts used in this research. Furthermore, using the basic concept, the properties of fuzzy left cosets, fuzzy right cosets, and fuzzy middle cosets were proved. Next, the relationship between fuzzy left cosets and fuzzy right cosets with fuzzy middle cosets from a fuzzy subgroup of a group was studied. This research is that in a fuzzy subgroup over an abelian group, a every left fuzzy coset is a fuzzy right coset, and for each fuzzy subgroup over any group, $e\mu = \mu = \mu e$ with identity element e. From this research, sufficient and necessary conditions for the similarity of two left cosets (right cosets) formed from two fuzzy subgroups of the same group or of the same abelian group were obtained, as well as sufficient and necessary conditions for the similarity of two middle cosets formed from two fuzzy subgroups fuzzy over the same group.

Keywords: Fuzzy subgroup, fuzzy left coset, fuzzy right coset, fuzzy middle coset

ABSTRAK

Konsep himpunan *fuzzy* digunakan untuk mempresentasikan suatu permasalahan yang sulit dinyatakan melalui himpunan tegas. Kemudian, penelitiaan konsep himpunan *fuzzy* dikombinasikan dengan bidang aljabar yang melahirkan konsep aljabar *fuzzy*. Penelitian aljabar *fuzzy* salah satunya adalah grup *fuzzy*. Dari penelitian ini memberikan ide bagi peneliti lainnya, yaitu seperti meneliti koset *fuzzy* dan terbentuknya grup faktor dari subgrup normal *fuzzy*. Koset *fuzzy* pada penelitian terbaru berupa koset kiri *fuzzy*, koset kanan *fuzzy*, dan koset tengah *fuzzy*. Tujuan penelitian ini adalah membuktikan sifat-sifat koset kiri *fuzzy*, koset kanan *fuzzy* dan koset tengah *fuzzy*, serta mengkaji hubungan pada koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy* dengan koset tengah *fuzzy* dari subgrup *fuzzy* suatu grup. Prosedur penelitian ini diawali dengan mempelajari konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini. Kemudian, dengan menggunakan konsep dasar tersebut, dibuktikan sifat-sifat koset kiri *fuzzy*, koset kanan *fuzzy* dan koset tengah *fuzzy*. Selanjutnya, mengkaji hubungan pada koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy* dengan koset tengah *fuzzy* pada subgrup *fuzzy* suatu grup.

Hasil penelitian ini adalah pada subgrup *fuzzy* atas grup abelian, koset kiri *fuzzy* merupakan koset kanan *fuzzy*. Setiap subgrup *fuzzy* atas sebarang grup, $e\mu = \mu = \mu e$ dengan *e* elemen identitas. Pada penelitian ini diperoleh juga syarat cukup dan syarat perlu kesamaan dua koset kiri (koset kanan) yang terbentuk dari dua subgrup *fuzzy* atas grup yang sama ataupun atas grup abelian yang sama, serta syarat cukup dan syarat perlu kesamaan dua koset tengah yang terbentuk dari dua subgrup *fuzzy* atas grup yang sama

Kata kunci: Subgrup *fuzzy*, koset kiri *fuzzy*, koset kanan *fuzzy*, koset tengah *fuzzy*

Received: 24 November 2022, Accepted: 22 Desember 2022, Published: 8 Januari 2023

LATARBELAKANG

Struktur aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Salah satu konsep dari struktur aljabar adalah grup. Pada awal abad 19, Galois menemukan Teori Grup, dalam bukunya (Malik et al., 2007) dan (Judson et al., 2018) menyatakan grup adalah suatu himpunan tak kosong dilengkapi satu operasi biner yang bersifat asosiatif, memiliki identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Dalam konsep grup terdapat konsep subgrup, yakni subset tidak kosong dari suatu grup yang membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup.

Sejalan dengan waktu, penelitian aljabar tidak hanya pada struktur saja, tetapi sudah dikombinasikan dengan bidang lainnya, salah satunya dengan himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan oleh (Zadeh, 1965), dan melahirkan konsep aljabar *fuzzy*. Pioner penelitian aljabar *fuzzy* adalah (Rosenfeld, 1971), yaitu grup *fuzzy*. Dari penelitian tersebut, memberikan ide bagi peneliti lainnya, diantaranya: (Sharma, 2013) meneliti *α-fuzzy* subgroups, hasil penelitian ini membuktikan syarat perlu dan cukup subgrup *α-Fuzzy* (subgrup normal) menjadi subgrup *fuzzy* (subgrup normal). Beberapa sifat dari subgrup normal *α-Fuzzy* juga dibahas, (Tarmizi & Abdurrahman, 2019) meneliti grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy*, hasil penelitian ini adalah $G/\mu = \{\mu_x | x \in G\}$ adalah grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy*, dengan μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G, μ_x adalah koset *fuzzy*, dan operasi binernya adalah "∘" dengan $\mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy}$ untuk setiap $\mu_y, \mu_y \in G/\mu$. Suatu epimorfisma f dari grup G ke grup G' dan subgrup normal fuzzy μ dari grup G yang konstan pada ker f mengakibatkan grup faktor G/μ isomorfik dengan grup faktor G'/f_μ.

Pada konsep aljabar *fuzzy*, termuat konsep subgrup *fuzzy*, di dalam subgrup *fuzzy* terdapat konsep koset *fuzzy*. Jika pada koset di klasik terbentuk atas subgrup dari suatu grup, misalkan H subgrup dari grup G dan $a \in G$. Himpunan $aH = \{ah | h \in H\}$ dan $Ha = \{ha | h \in H\}$ masing-masing disebut koset kiri dan kanan dari H di G, maka pada koset *fuzzy* ini terbentuk atas subgrup *fuzzy* dari suatu grup, misalkan μ merupakan subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a \in G$. Koset kiri dari μ, dinotasikan dengan $a\mu$. Koset kanan dari μ, dinotasikan dengan μa.

Pada penelitian koset *fuzzy* oleh (Sharma, 2013) dan (Tarmizi & Abdurrahman, 2019) hanya membahas beberapa sifat-sifat serta hubungan antara koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy*. Pada penelitian terbaru, (Islam, 2021) memperkenalkan koset tengah *fuzzy*, seperti pada konsep koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy*, koset tengah *fuzzy* ini terbentuk pada subgrup *fuzzy* dari suatu grup. Dari pemaparan di atas muncullah pertanyaan bagaimana sifat-sifat dari koset tengah *fuzzy*, dan apa hubungan antara koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy* dengan koset tengah *fuzzy*.

Pada penelitian (Sharma, 2013) dan (Tarmizi & Abdurrahman, 2019) secara garis besar meneliti koset *fuzzy* dan terbentuknya grup faktor dari subgrup normal *fuzzy*, tetapi tidak mengkaji koset tengah *fuzzy*. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk meneliti "Sifat-Sifat Koset *Fuzzy* dari Subgrup *Fuzzy* Suatu Grup", yang dirujuk pada tulisan (Islam, 2021).

TINJAUAN PUSTAKA

Berikut disajikan konsep grup, subset *fuzzy*, dan subgrup *fuzzy*. Menurut (Judson et al., 2018; Malik et al., 2007), Suatu grup merupakan pasangan terurut $(G,*)$, dengan G merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G sedemikian sehingga bersifat asosiatif, memuat elemen identitas, dan setiap elemen mempunyai invers. Pada grup terdapat sifat – sifat dasar, diantaranya sifat invers, yaitu:

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ dan } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

untuk setiap $a, b \in G$.

Pada grup G dapat dibentuk himpunan baru dari subgrup H di G, yaitu himpunan

$$aH = \{ah|h \in H\} \text{ dan } Ha = \{ha|h \in H\}$$

masing – masing disebut koset kiri dan kanan dari H dalam G. Pada saat grup G adalah komutatif, maka koset kiri merupakan koset kanan.

Selanjutnya, (Zadeh, 1965) mendefinisikan suatu subset *fuzzy* dari suatu himpunan, yaitu suatu subset *fuzzy* μ dari himpunan tidak kosong X adalah suatu fungsi $\mu: X \to [0,1]$.

Berikut juga diberikan definisi dari kesamaan fungsi sebuah subset *fuzzy* sebagaimana yang ditulis oleh (Islam, 2021), yaitu dua subset *fuzzy* λ dan μ dari X dikatakan sama jika dan hanya jika $\lambda(x) = \mu(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Sejalan dengan subset fuzzy yang dikemukkan Zadeh, (Rosenfeld, 1971) mendefinisikan subgrup *fuzzy* yang merupakan perpaduan antara grup dan subset *fuzzy*, yaitu suatu subset *fuzzy* μ dari grup G disebut sebagai subgrup *fuzzy* dari G jika dan hanya jika

$$\mu(xy) \geq min\big(\mu(x), \mu(y)\big) \text{ dan } \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Sebagai ilustrasi dari definisi subgrup fuzzy, diberikan grup $(\mathbb{Z}_5 - \{0\}, \cdot)$ terhadap perkalian modulo dan subset *fuzzy* μ dari $\mathbb{Z}_5 - \{0\}$ sedemikian sehingga

$$\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 0{,}2 & , x = 2{,}3 \\ 0{,}5 & , x = 4 \end{cases}$$

Dapat ditunjukan bahwa μ merupakan subset *fuzzy* atas grup $\mathbb{Z}_5 - \{0\}$.

Pada penelitian (Onasanya & Ilori, 2013) dan (Onasanya, 2016) telah membahas tentang subgroup *fuzzy*. Berikut ini, disajikan lemma berkaitan dengan nilai keanggotaan elemen identitas dan invers serta proposisi yang menyatakan syarat perlu dan syarat cukup suatu subset *fuzzy* atas grup G merupakan subgrup *fuzzy* yang dinyatakan oleh (Abdurrahman, 2018; Islam, 2021)

Lemma 2.1 *Jika μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari suatu grup G dan e merupakan identitas di G, maka*

$$\mu(x) \leq \mu(e) \text{ dan } \mu(x) = \mu(x^{-1})$$

untuk setiap $x \in G$.

Proposisi 2.2 *Subset fuzzy μ dari grup G merupakan subgrup fuzzy dari G jika dan hanya jika $\mu(xy^{-1}) \geq min\big(\mu(x), \mu(y)\big)$ untuk setiap $x, y \in G$.*

Berikut disajikan definisi koset *fuzzy* yang meliputi koset kiri *fuzzy*, koset kanan *fuzzy* dan koset tengah *fuzzy* yang dinyatakan oleh (Islam, 2021) sebagai berikut.

Definisi 2.3 *Misalkan μ merupakan subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a, b \in G$.*

(i) *Koset kiri dari μ, dinotasikan dengan $a\mu$, didefinisikan dengan*

$$(a\mu)(x) = \mu(a^{-1}x)$$

untuk setiap $x \in G$.

(ii) *Koset kanan dari μ, dinotasikan dengan μa, didefinisikan dengan*

$$(\mu a)(x) = \mu(xa^{-1})$$

untuk setiap $x \in G$.

(iii) *Koset tengah μ, dinotasikan dengan $a\mu b$, didefinisikan dengan*

$$(a\mu b)(x) = \mu(a^{-1}xb^{-1})$$

untuk setiap $x \in G$.

Berikut disajikan definisi konjugat dari sebuah subgrup *fuzzy* yang dinyatakan oleh (Islam, 2021) sebagai berikut.

Definisi 2.4 *Subgrup fuzzy μ dan λ dari G disebut konjugat jika untuk setiap $a \in G$, dipenuhi kondisi $\mu(a^{-1}xa) = \lambda(x)$ untuk setiap $x \in G$.*

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan prosedur sebagai berikut:

1. Menjelaskan definisi dan membuktikan teorema, lemma dan proposisi dari konsep-konsep pendukung, yaitu pada Fungsi, Grup, Subset *Fuzzy*, dan Subgrup *Fuzzy*.
2. Membuktikan pada subgrup fuzzy, koset kiri fuzzy merupakan koset kanan fuzzy atas elemen identitas.
3. Membuktikan pada subgrup fuzzy, jika nilai keanggotaan fuzzy dari suatu elemen di grup G sama dengan nilai keanggotaan fuzzy dari elemen identitasnya maka koset kiri fuzzy merupakan koset kanan fuzzy atas elemen tersebut.
4. Membuktikan pada subgrup fuzzy, koset kiri fuzzy merupakan koset kanan fuzzy di grup abelian.
5. Membuktikan kesamaan dua koset kiri (koset kanan) yang terbentuk dari dua subgrup fuzzy atas grup yang sama.
6. Membuktikan kesamaan dua koset kiri (koset kanan) yang terbentuk dari dua subgrup fuzzy atas grup abelian yang sama.
7. Membuktikan pada dua subgrup fuzzy, syarat cukup koset kiri fuzzy $a\lambda$ merupakan koset kiri fuzzy $b\mu$ dan koset kanan fuzzy λa merupakan koset kanan fuzzy μb.
8. Membuktikan pada subgrup fuzzy, koset kiri fuzzy merupakan koset kanan fuzzy atas grup yang sama.
9. Membuktikan pada dua subgrup fuzzy, syarat perlu untuk suatu koset tengah agar menjadi subgrup fuzzy.
10. Membuktikan keterkaitan koset kiri fuzzy dan koset kanan fuzzy, dengan koset tengah fuzzy pada subgrup fuzzy.
11. Membuktikan pada subgrup fuzzy, koset tengah fuzzy $a\mu b$ merupakan koset tengah fuzzy $c\mu d$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada suatu subgrup H dari grup G, terdapat elemen identitas e di H, sehingga $He = H = eH$. Ini berarti H merupakan suatu koset kanan dan koset kiri dari G. Hal ini berlaku juga pada koset *fuzzy*, yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1 *Diberikan grup G dengan elemen identitas e. Jika μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari G, maka $e\mu = \mu = \mu e$.*

Bukti

Misalkan μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G. Akan dibuktikan $e\mu = \mu = \mu e$. Karena e elemen identitas di G, dipenuhi kondisi $e^{-1} = e$. Akibatnya untuk setiap $x \in G$, berlaku $xe^{-1} = x = e^{-1}x$. Oleh karena itu,

$$(e\mu)(x) = \mu(e^{-1}x) = \mu(x) = \mu(xe^{-1}) = \mu(xe^{-1}).$$

Jadi, $e\mu = \mu = \mu e$. ■

Jika nilai keanggotaan *fuzzy* dari suatu elemen di grup sama dengan nilai keanggotaan *fuzzy* dari elemen identitasnya, maka koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy* yang terbentuk dari elemen tersebut adalah sama. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2 *Misalkan μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a \in G$, maka $\mu(a) = \mu(e)$ jika dan hanya jika $a\mu = \mu = \mu a$, dengan e merupakan identitas pada G.*

Bukti:

Diketahui μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a \in G$.

($\Longrightarrow$) Akan dibuktikan jika $\mu(a) = \mu(e)$ maka $a\mu = \mu = \mu a$. Diberikan sebarang $x \in G$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}(a\mu)(x) &= (a\mu)(x)\\ &\geq min\big(\mu(a^{-1}), \mu(x)\big)\\ &= min\big(\mu(a), \mu(x)\big)\\ &= min\big(\mu(e), \mu(x)\big)\\ &= \mu(x)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(aa^{-1}x)\\ &\geq min\big(\mu(a), \mu(a^{-1}x)\big)\\ &= min\big(\mu(e), \mu(a^{-1}x)\big)\\ &= \mu(a^{-1}x)\\ &= (a\mu)(x).\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$a\mu = \mu.$$

Dengan metode serupa, dapat dibuktikan bahwa

$$\mu = \mu a.$$

Oleh karena itu,

$$a\mu = \mu = \mu a.$$

($\Longleftarrow$) Akan dibuktikan jika $a\mu = \mu = \mu a$ maka $\mu(a) = \mu(e)$. Diberikan sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.3 dan kondisi yang diketahui $\mu = \mu a$, diperoleh

$$\mu(a) = (\mu a)(a) = \mu(aa^{-1}) = \mu(e).$$

Oleh karena itu,

$$\mu(a) = \mu(e). \blacksquare$$

Apabila G suatu grup abelian, maka mudah dimengerti bahwa setiap koset kiri suatu subgrup merupakan koset kanan dari subgrup tersebut. Berikut ditunjukkan teorema koset kiri di subgrup *fuzzy* merupakan koset kanan di subgrup *fuzzy* tersebut.

Teorema 4.3 *Jika μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari suatu grup abelian G maka, setiap koset kiri dari μ merupakan koset kanan dari μ pada G, yakni $a\mu = \mu a$ untuk setiap $a \in G$.*

Bukti

Jika μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari suatu grup abelian G. Akan dibuktikan $a\mu = \mu a$ untuk setiap $a \in G$. Berdasarkan Definisi 2.3 dan diketahui G merupakan grup abelian. Dengan demikian untuk setiap $x \in G$, diperoleh

$$\begin{aligned}(a\mu)(x) &= \mu(a^{-1}x)\\ &= \mu(xa^{-1})\\ &= (\mu a)(x).\end{aligned}$$

Jadi, $a\mu = \mu a$. ■

Pada teorema berikut akan ditunjukkan syarat perlu dan syarat cukup kesamaan dua koset kiri (koset kanan) yang terbentuk dari dua subgrup *fuzzy* atas grup yang sama.

Teorema 4.4 *Jika λ dan μ merupakan dua subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a \in G$ maka berlaku*

(i) $a\lambda = a\mu$ jika dan hanya jika $\lambda = \mu$.

(ii) $\lambda a = \mu a$ jika dan hanya jika $\lambda = \mu$.

Bukti:

Diketahui λ dan μ merupakan dua subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a \in G$.

(i) ($\Longrightarrow$) Diketahui $a\lambda = a\mu$. Akan dibuktikan $\lambda = \mu$ atau akan dibuktikan untuk setiap $x \in G$ $(\lambda)(x) = (\mu)(x)$

Diberikan sebarang $x \in G$. Karena G adalah grup, maka terdapat unsur identitas e di G dan terdapat $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x^{-1}x = e = xx^{-1}$ dan $xe = x = ex$. Selanjutnya, berdasarkan kondisi yang diketahui dan Definisi 2.3, diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \lambda(ex)\\ &= \lambda\left(a^{-1}(ax)\right)\\ &= (a\lambda)(ax)\\ &= (a\mu)(ax)\\ &= \mu\left(a^{-1}(ax)\right)\\ &= \mu(ex)\\ &= \mu(x)\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\lambda = \mu$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\lambda = \mu$. Akan dibuktikan $a\lambda = a\mu$ jika dan hanya jika $(a\lambda)(x) = (a\mu)(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.6 dan diketahui $\lambda = \mu$ diperoleh

$$(a\lambda)(x) = \lambda(a^{-1}x) = \mu(a^{-1}x) = \mu(a^{-1}x).$$

Oleh karena itu, $a\lambda = a\mu$.

(ii) Dengan cara yang sama pada bagian (i), diperoleh $\lambda a = \mu a$ jika dan hanya jika $\lambda = \mu$.

Akibat berikut merupakan akibat langsung dari Teorema 4.3 dan Teorema 4.4.

Akibat 4.5 *Misalkan λ dan μ merupakan dua subgrup fuzzy dari suatu grup abelian G dan $a \in G$. Berlaku, $a\lambda = \mu a$ jika dan hanya jika $\lambda = \mu$.*

Bukti:

Diketahui λ dan μ merupakan dua subgrup *fuzzy* dari suatu grup abelian G dan $a \in G$.

($\Longrightarrow$) Diketahui $a\lambda = \mu a$. Akan dibuktikan $\lambda = \mu$ yakni berdasarkan Teorema 4.4 cukup ditunjukkan $a\lambda = a\mu$. Berikutnya dari yang diketahui $a\lambda = \mu a$ sehingga berdasarkan Teorema 4.3 diperoleh

$$a\lambda = \mu a = a\mu.$$

Jadi, terbukti $\lambda = \mu$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\lambda = \mu$. Akan dibuktikan $a\lambda = \mu a$. Berdasarkan Teorema 4.4 diperoleh $a\lambda = a\mu$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 4.3 diperoleh

$$a\lambda = a\mu = \mu a.$$

Jadi, terbukti $a\lambda = \mu a$.

Dengan demikian, terbukti $a\lambda = \mu a$ jika dan hanya jika $\lambda = \mu$. ■

Pada subgrup *fuzzy*, syarat cukup koset kiri *fuzzy* sama dengan koset kanan *fuzzy* ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 4.6 *Misalkan μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a \in G$. Jika $\mu(x) = \mu(a^{-1}xa)$ untuk setiap $x \in G$, maka $a\mu = \mu a$.*

Bukti:

Diketahui μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a \in G$ dengan $\mu(x) = \mu(a^{-1}xa)$ untuk setiap $x \in G$. Akan dibuktikan $a\mu = \mu a$, yakni $(a\mu)(x) = (\mu a)(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Karena G adalah grup, terdapat unsur identitas e di G dan $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $xx^{-1} = e = x^{-1}x$ dan $xe = x = ex$. Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.3, dan diketahui $\mu(x) = \mu(a^{-1}xa)$ diperoleh

$$\begin{aligned}(a\mu)(x) &= \mu(a^{-1}x)\\ &= \mu(a^{-1}xe)\\ &= \mu(a^{-1}(xa^{-1})a)\\ &= (\mu a)(x).\end{aligned}$$

Jadi, $a\mu = \mu a$. ■

Pada teorema berikut ditunjukkan syarat cukup koset kiri *fuzzy* dari $(a\mu)(x)$ sama dengan koset kiri *fuzzy* dari $\mu(a^{-1}x)$ dan koset kanan *fuzzy* dari $(\mu a)(x)$ sama dengan koset kanan *fuzzy* dari $\mu(xa^{-1})$ yang terbentuk dari dua subgrup *fuzzy* atas grup yang sama.

Teorema 4.7 *Jika λ dan μ merupakan dua subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a, b \in G$ maka berlaku,*

(i) $a\lambda = b\mu$ *jika dan hanya jika* $\lambda = (a^{-1}b)\mu$.

(ii) $\lambda a = \mu b$ *jika dan hanya jika* $\lambda = \mu(ba^{-1})$.

Bukti:

Diketahui λ dan μ merupakan dua subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a, b \in G$.

(i) ($\Longrightarrow$) Diketahui $a\lambda = b\mu$. Akan dibuktikan $\lambda = (a^{-1}b)\mu$ jika dan hanya jika $\lambda(x) = \big((a^{-1}b)\mu\big)(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Karena G adalah grup, sehingga terdapat unsur identitas e di G dan $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x^{-1}x = e = xx^{-1}$ dan $xe = x = ex$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.3, dan diketahui $a\lambda = b\mu$ diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \lambda(ex) \\ &= \lambda\big(a^{-1}(ax)\big) \\ &= (a\lambda)(ax) \\ &= (b\mu)(ax) \\ &= \mu((a^{-1}b)^{-1}x) \\ &= \big((a^{-1}b)\mu\big)(x). \end{aligned}$$

Jadi, $\lambda = (a^{-1}b)\mu$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\lambda = (a^{-1}b)\mu$. Akan dibuktikan $a\lambda = b\mu$ jika dan hanya jika $a\lambda(x) = b\mu(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.3 dan kondisi yang diketahui, diperoleh

$$\begin{aligned} (a\lambda)(x) &= \lambda(a^{-1}x) \\ &= \big((a^{-1}b)\mu\big)(a^{-1}x) \\ &= \mu\big((a^{-1}b)^{-1}(a^{-1}x)\big) \\ &= \mu(b^{-1}aa^{-1}x) \\ &= \mu(b^{-1}ex) \\ &= \mu(b^{-1}x) \\ &= (b\mu)(x) \end{aligned}$$

Jadi, $a\lambda = b\mu$.

(ii) Dengan cara yang sama pada bagian (i), diperoleh $\lambda a = \mu b$ jika dan hanya jika $\lambda = \mu ba^{-1}$. ■

Pada dua subgrup *fuzzy*, dapat terbentuk koset kiri *fuzzy* dari $a\mu$ sama dengan koset kanan *fuzzy* μa. Hal ini ditunjukkan pada Teorema berikut.

Teorema 4.8 *Jika λ dan μ merupakan dua subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a, b \in G$ maka berlaku,*

(i) $a\lambda = \mu b$ *jika dan hanya jika* $\lambda = a^{-1}\mu b$.
(ii) $a\lambda = \mu b$ *jika dan hanya jika* $\mu = a\lambda b^{-1}$.

Bukti:

Diketahui λ dan μ merupakan dua subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a, b \in G$.

(i). ($\Longrightarrow$)Diketahui $a\lambda = \mu b$. Akan dibuktikan $\lambda = a^{-1}\mu b$ jika dan hanya jika $\lambda(x) = a^{-1}\mu b(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Karena G adalah grup, maka terdapat unsur identitas e di G dan $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x^{-1}x = e = xx^{-1}$ dan $xe = x = ex$. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.3 dan diketahui $a\lambda = \mu b$, diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \lambda(ex)\\ &= \lambda(a^{-1}ax)\\ &= (a\lambda)(ax)\\ &= (\mu b)(ax)\\ &= \mu((ax)b^{-1})\\ &= \mu((a^{-1})^{-1}xb^{-1})\\ &= (a^{-1}\mu)(xb^{-1})\\ &= (a^{-1}\mu b)(x).\end{aligned}$$

Jadi, $\lambda = a^{-1}\mu b$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\lambda = a^{-1}\mu b$. Akan dibuktikan $a\lambda = \mu b$ jika dan hanya jika $a\lambda(x) = \mu b(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.3 dan diketahui $\lambda = a^{-1}\mu b$ diperoleh

$$\begin{aligned}(a\lambda)(x) &= \lambda(a^{-1}x)\\ &= (a^{-1}\mu b)(a^{-1}x)\\ &= (a^{-1}\mu)(a^{-1}xb^{-1})\\ &= \mu((a^{-1})^{-1}a^{-1}xb^{-1})\\ &= \mu(aa^{-1}xb^{-1})\\ &= \mu(exb^{-1})\\ &= \mu(xb^{-1})\\ &= (\mu b)(x).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $a\lambda = \mu b$ jika dan hanya jika $\lambda = a^{-1}\mu b$.

(ii). Dengan cara yang sama pada bagian (i), diperoleh $a\lambda = \mu b$ jika dan hanya jika $\lambda = a\lambda b^{-1}$. ■

Berikut disajikan syarat perlu untuk suatu koset tengah agar menjadi subgrup *fuzzy* ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 4.9 *Setiap koset tengah* $a\mu a^{-1}$ *dari* μ *merupakan suatu subgrup fuzzy dari* G, *jika* μ *bersifat konjugat fuzzy terhadap suatu subgrup fuzzy* λ *dari* G.

Bukti:

Misalkan μ bersifat konjugat *fuzzy* terhadap suatu subgrup *fuzzy* λ dari G. Akan dibuktikan setiap koset tengah $a\mu a^{-1}$ dari μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G. Diberikan sebarang $a \in G$, sehingga menurut Definisi 2.3, Definisi 2.4 dan Proposisi subgroup, untuk setiap $x, y \in G$ diperoleh

$$\begin{aligned}(a\mu a^{-1})(xy^{-1}) &= \mu(a^{-1}(xy^{-1})a)\\ &= \lambda(xy^{-1})\\ &\geq min\big(\lambda(x), \lambda(y)\big)\\ &= min\big(\mu(a^{-1}xa), \mu(a^{-1}ya)\big)\\ &= min\big((a\mu a^{-1})(x), (a\mu a^{-1})(y)\big).\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $(a\mu a^{-1})(xy^{-1}) \geq min\big((a\mu a^{-1})(x), (a\mu a^{-1})(y)\big)$. ■

Syarat perlu untuk suatu koset tengah $a\mu a^{-1}$ agar menjadi subgrup *fuzzy* diberikan pada Teorema 4.1. Dengan melihat Teorema 4.1, dapat disimpulkan dari Teorema 4.9 bahwa koset kiri *fuzzy* dan koset kanan *fuzzy* juga merupakan subgrup *fuzzy* dengan syarat yang sama.

Teorema 4.10 *Jika μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a, b, c, d \in G$ maka berlaku*

(i) $a(b\mu) = (ab)\mu$ *jika $b\mu$ merupakan suatu subgrup fuzzy dari G.*

(ii) $(\mu a)b = \mu(ab)$ *jika μa merupakan suatu subgrup fuzzy dari G.*

(iii) $(ab)\mu(cd) = a(b\mu c)d$ *jika $b\mu c$ merupakan suatu subgrup fuzzy dari G.*

Bukti:

Diketahui μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a, b, c, d \in G$.

(i). Akan dibuktikan jika $b\mu$ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G maka $a(b\mu) = (ab)\mu$. Diberikan sebarang $x \in G$, sehingga menurut Definisi 2.3 dan teorema subgroup *fuzzy*, diperoleh

$$\begin{aligned}\big(a(b\mu)\big)(x) &= (b\mu)(a^{-1}x)\\ &= \mu\big(b^{-1}(a^{-1}x)\big)\\ &= \mu\big((b^{-1}a^{-1})x\big)\\ &= \mu((ab)^{-1}x)\\ &= \big((ab)\mu\big)(x)\end{aligned}$$

Jadi, $a(b\mu) = (ab)\mu$.

(ii). Dengan cara yang sama pada bagian (i) menggunakan koset kanan *fuzzy*, diperoleh $(\mu a)b = \mu(ab)$.

(iii). Akan dibuktikan jika $b\mu c$ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G maka $(ab)\mu(cd) = a(b\mu c)d$. Diberikan sebarang $x \in G$, sehingga menurut Definisi 2.3 dan subgrup fuzzy, diperoleh

$$\begin{aligned}\big((ab)\mu(cd)\big)(x) &= \mu((ab)^{-1}x(cd)^{-1})\\ &= \mu(b^{-1}a^{-1}xd^{-1}c^{-1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu(b^{-1}(a^{-1}xd^{-1})c^{-1}) \\
&= (b\mu c)(a^{-1}xd^{-1}) \\
&= (a(b\mu c)d)(x)
\end{aligned}
$$

Jadi, $(ab)\mu(cd) = a(b\mu c)d$. ■

Pada teorema berikut ditunjukkan syarat cukup koset tengah *fuzzy* dari $(a\mu b)(x)$ sama dengan koset tengah *fuzzy* dari $\mu(a^{-1}xb^{-1})$ yang terbentuk dari subgrup *fuzzy* atas grup yang sama.

Teorema 4.11 *Misalkan μ merupakan suatu subgrup fuzzy dari suatu grup G dan $a, b, c, d \in G$. Diperoleh, $a\mu b = c\mu d$ jika dan hanya jika $b^{-1}\mu a^{-1} = d^{-1}\mu c^{-1}$.*

Bukti:

Diketahui μ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari suatu grup G dan $a, b, c, d \in G$.

($\Longrightarrow$) Diketahui $a\mu b = c\mu d$. Akan dibuktikan $b^{-1}\mu a^{-1} = d^{-1}\mu c^{-1}$ jika dan hanya jika $b^{-1}\mu a^{-1}(x) = d^{-1}\mu c^{-1}(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.3 dan diketahui $a\mu b = c\mu d$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
(b^{-1}\mu a^{-1})(x) &= \mu(bxa) \\
&= \mu((bxa)^{-1}) \\
&= \mu(a^{-1}x^{-1}b^{-1}) \\
&= (a\mu b)(x^{-1}) \\
&= (c\mu d)(x^{-1}) \\
&= \mu(c^{-1}x^{-1}d^{-1}) \\
&= \mu((dxc)^{-1}) \\
&= \mu(dxc) \\
&= (d^{-1}\mu c^{-1})(x)
\end{aligned}
$$

Jadi, $b^{-1}\mu a^{-1} = d^{-1}\mu c^{-1}$.

($\Longleftarrow$) Diketahui $b^{-1}\mu a^{-1} = d^{-1}\mu c^{-1}$. Akan dibuktikan $a\mu b = c\mu d$ jika dan hanya jika $a\mu b(x) = c\mu d(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Diberikan sebarang $x \in G$. Berdasarkan Definisi 2.3, Lemma 2.1, dan diketahui $b^{-1}\mu a^{-1} = d^{-1}\mu c^{-1}$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
(a\mu b)(x) &= \mu(a^{-1}xb^{-1}) \\
&= \mu((bx^{-1}a)^{-1}) \\
&= \mu(bx^{-1}a) \\
&= (b^{-1}\mu a^{-1})(x^{-1}) \\
&= (d^{-1}\mu c^{-1})(x^{-1}) \\
&= \mu(dx^{-1}c) \\
&= \mu((dx^{-1}c)^{-1}) \\
&= \mu(c^{-1}xd^{-1}) \\
&= (c\mu d)(x)
\end{aligned}
$$

Jadi, $a\mu b = c\mu d$. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan berikut ini

a) Jika nilai keanggotaan *fuzzy* dari suatu elemen di grup G sama dengan nilai keanggotaan *fuzzy* dari elemen identitasnya, maka koset kiri *fuzzy* merupakan koset kanan *fuzzy* atas elemen tersebut.
b) Koset kiri (koset kanan) atas $a \in G$ dari λ sama dengan koset kiri (koset kanan) atas $b \in G$ dari μ jika dan hanya jika $\lambda = (a^{-1}b)\mu; \left(\lambda = \mu(ba^{-1})\right)$.
c) Koset tengah dari μ sama dengan koset tengah dari λ jika μ bersifat konjugat *fuzzy* terhadap suatu subgrup *fuzzy* λ dari G.
d) Koset kiri dari $a(b\mu)$ sama dengan koset kiri dari $(ab)\mu$ jika $b\mu$ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G. Koset kanan dari $(\mu a)b$ sama dengan koset kanan dari $\mu(ab)$ jika μa merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G. Koset tengah dari $(ab)\mu(cd)$ sama dengan koset tengah dari $a(b\mu c)d$ jika $b\mu c$ merupakan suatu subgrup *fuzzy* dari G.
e) Koset tengah atas $a, b \in G$ dari μ sama dengan koset tengah atas $c, d \in G$ dari μ jika dan hanya jika $b^{-1}\mu a^{-1} = d^{-1}\mu c^{-1}$.

REFERENSI

Abdurrahman, S. (2018). Interior Subgrup Fuzzy. *Jurnal Fourier*, *7*(1), 13–21. https://doi.org/10.14421/fourier.2018.71.13-21

Islam, M. N. (2021). Some Results on Fuzzy Cosets of Fuzzy Subgroups of a Group. *Thai Journal of Mathematics*, *19*, 29–36.

Judson, T. W., Beezer, R. A., & Behn, A. (2018). *Abstract Algebra: Theory and Applications* (Annual Edi). University of Puget Sound.

Malik, D. S., Mordeson, J. N., & Sen, M. . (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. Creighton University 2007.

Onasanya, B. O. (2016). Some Reviews in fuzzy subgroups and anti fuzzy subgroups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *11*(3), 377–385.

Onasanya, B. O., & Ilori, S. A. (2013). On Fuzzy Subgroup and Fuzzy Cosets. *International Journal of Computer Applications*, *81*(14), 20–22. https://doi.org/10.5120/14184-2353

Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *35*(3), 512–517. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90199-5

Sharma, P. K. (2013). Alpha - Fuzzy Subgroups. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, *3*(1), 47–59.

Tarmizi, M., & Abdurrahman, S. (2019). Grup faktor yang dibangun dari subgrup normal fuzzy. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan Epsilon*, *13*(1), 1–12. https://doi.org/10.20527/epsilon.v13i1.1240

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X