Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.16 No.2 (Desember 2022) Hal. 185-197

SIFAT-SIFAT MODUL *SOFT*

Ridha Mahmudah, Na'imah Hijriati*
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
**Email: nh_hijriati@ulm.ac.id*

ABSTRACT

A non-empty set is a module over a ring with a unit if it is a commutative group closed under scalar multiplication which fulfils some axioms. Combining the module concept with the soft set produces the soft module concept. This concept was introduced by Sun, Zhang, and Lui in 2008. A soft set over a universal set is an ordered pair of a function and a parameter set. The function of the soft set is a mapping from the parameter set into the power set of the universal set. If the universal set of the soft set is a module and the image of the function which constructs the soft set is a submodule, then the soft set is called a soft module. This research aimed to prove that each intersection, union, direct sum, and product operation of some soft modules is a soft module and verify that the module homomorphism composed with a soft module is a soft module. This research begins by proving the properties of intersection, union, direct sums, and product operation on the soft module. This study also proves the properties of the soft submodule. Furthermore, based on the properties of the soft submodule, it is proven that the properties of the soft module are related to module homomorphism. This research concludes that each of the results of some soft modules' intersection, union, direct sum, and product operations are a soft module. Furthermore, it is also obtained that the module homomorphism, which is composed of a soft module, is a soft module.

Keywords*:* Module theory, soft set, soft module, soft submodule**.**

ABSTRAK

Suatu himpunan tak kosong disebut modul atas suatu ring dengan elemen satuan jika himpunan tersebut merupakan grup komutatif yang tertutup terhadap perkalian skalar dan memenuhi beberapa aksioma. Kombinasi dari konsep modul dengan himpunan soft menghasilkan modul soft. Konsep ini diperkenalkan oleh Sun, Zhang dan Lui pada tahun 2008. Himpunan soft atas suatu himpunan semesta adalah pasangan berurut dari fungsi dan himpunan parameter. Fungsi dari himpunan soft ini adalah pemetaaan dari himpunan parameter ke himpunan kuasa semesta. Jika himpunan semesta dari himpunan soft ini merupakan suatu modul dan image dari fungsi yang membentuk himpunan soft merupakan submodul, maka himpunan soft ini disebut modul soft. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan hasil operasi irisan, operasi gabungan, jumlah langsung dan hasilkali dari beberapa modul soft merupakan modul soft dan hasil dari homomorfisma modul yang dikomposisikan dengan modul soft merupakan modul soft. Penelitian ini diawali dengan membuktikan sifat operasi irisan, operasi gabungan, jumlah langsung, dan hasilkali pada modul soft. Kemudian, penelitian ini membuktikan sifat pada submodul soft. Selanjutnya, berdasarkan sifat dari submodul soft, dibuktikan sifat modul soft terkait dengan homomorfisma modul. Kesimpulan dari penelitian ini adalah hasil dari operasi irisan, gabungan, jumlah langsung dan hasilkali dari beberapa modul soft merupakan modul soft. Lebih lanjut, penelitian ini diperoleh juga bahwa hasil dari homomorfisma modul yang dikomposisikan dengan modul soft menghasilkan modul soft.

Kata kunci : Teori modul, himpunan soft, modul soft, submodul soft.

Received: 03 Desember 2022, Accepted: 23 Desember 2022, Published: 24 Desember 2022

PENDAHULUAN

Pada saat ini, permasalahan pemodelan data yang tidak pasti dalam ilmu ekonomi, ilmu sosial, ilmu lingkungan, teknik, kedokteran dan lain sebagainya tidak dapat ditangani oleh metode klasik. Alat bantu matematika yang dapat menyelesaikan masalah ketidakpastian salah satunya adalah teori probabilitas, himpunan *fuzzy*, himpunan *rough*, dan ilmu matematika lainnya (Sun et al., 2008). Pada tahun 1999, Molodtsov mengusulkan pendekatan baru, yaitu teori himpunan *soft*. Himpunan *soft* digunakan untuk membantu permasalahan ketidakjelasan karakteristik objek, dan permasalahan parameter yang beragam (Molodtsov, 1999).

Saat ini banyak peneliti yang mengembangkan konsep himpunan *soft* dengan memadukan konsep pada bidang aljabar. Salah satunya adalah Sun, Zhang, & Lun (2008) mengkolaborasikan antara modul dan himpunan *soft* yang disebut dengan modul *soft*. Modul adalah bentuk perumuman dari ruang vektor di aljabar linier, yakni himpunan skalar yang digunakan pada modul tidak selalu berupa lapangan tetapi cukup ring dengan elemen satuan. Sedangkan modul *soft* adalah himpunan *soft* dengan semestanya merupakan suatu modul dan hasil pemetaan berupa submodul. Sejak dikenalkannya konsep modul *soft*, banyak peneliti yang tertarik mengkaji mengenai modul *soft*, diantaranya adalah (Türkmen & Pancar, 2013), (Xiang, 2013), (Yücel et al., 2017), (Taouti et al., 2019). Selain itu, terdapat juga penelitian yang mengkolaborasikan antara konsep modul soft dengan *fuzzy*, yang dikenal dengan konsep submodul *soft fuzzy*, diantaranya adalah (Cigdem; Gunduz & Bayramov, 2011), (Cigdem Gunduz & Bayramov, 2011), (Xiao et al., 2012).

Jika himpunan *soft* merupakan suatu modul *soft* tentu menimbulkan pertanyaan, apakah hasil operasi irisan dan operasi gabungan dari dua atau lebih modul *soft* merupakan suatu modul *soft*. Selain itu, jika didefinisikan jumlah langsung dan hasilkali langsung pada modul *soft*, apakah hasil dari jumlah langsung dan hasilkali langsung membentuk modul *soft* juga. Jika semesta dua modul *soft* dihubungkan oleh suatu homomorfisma modul tentu menimbulkan pertanyaan apakah pemetaan dari modul *soft* yang dikomposisikan dengan suatu homomorfisma menghasilkan modul *soft*. Lebih lanjut bagaimanakah sifat-sifat dari dua modul *soft* yang dihubungkan suatu homomorfisma modul.

TINJAUAN PUSTAKA

Teori modul merupakan bentuk perumuman dari ruang vektor di aljabar linier dengan skalar yang dipakai tidak harus sebuah lapangan cukup sebuah ring dengan elemen satuan. Definisi modul adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1(Adkins & Weintraub, 1992)

Diberikan sebarang ring R dengan elemen satuan 1 dan grup abelian M terhadap operasi penjumalahan $+$

Grup abelian $(M,+)$ disebut modul kiri atas ring R dengan elemen satuan jika dilengkapi operasi perkalian skalar yang didefinisikan dengan

$$\cdot : R \times M \to M, (a,m) \to am$$

dan memenuhi aksioma

a) $a \cdot (m+n) = a \cdot m + a \cdot n$

b) $(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$

c) $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$

d) $1 \cdot m = m$

untuk setiap $a, b \in R$ dan untuk setiap $m, n \in M$. Selanjutnya, modul kiri M atas R dinotasikan dengan R-modul M.

Himpunan bagian dari modul M atas ring R dengan elemen satuan disebut submodul M. Dengan definisi submodul sebagai berikut.

Definisi 2.2(Adkins & Weintraub, 1992)

Diberikan modul M atas ring R. Suatu himpunan bagian tak kosong N dari M disebut submodul dari M jika N merupakan subgroup dari M terhadap operasi penjumlahan, dan N merupakan modul atas R terhadap operasi perkalian skalar yang sama dengan operasi perkalian skalar pada modul M atas R.

Himpunan *soft* pertama kali dikemukakan oleh Molodsov pada tahun 1999. Definisi dari himpunan *soft* sebagai berikut.

Definisi 2.3 (Molodtsov, 1999)

Diberikan himpunan semesta U dan himpunan parameter A. Pasangan (F, A) disebut himpunan soft atas himpunan U dengan

$$F: A \to P(U)$$

merupakan suatu pemetaan dari A ke himpunan kuasa $P(U)$.

Dalam sebuah himpunan terdapat himpunan bagian, dalam himpunan *soft* juga terdapat himpunan bagian dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.4 (Molodtsov, 1999)

Diberikan dua himpunan soft (F, A) dan (G, B) atas himpunan U. Himpunan soft (F, A) disebut himpunan bagian dari (G, B) jika

1) $A \subseteq B$ *dan*

2) Untuk setiap $x \in A, F(x) = G(x)$
dan dinotasikan dengan $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$. *Sebaliknya,* (F, A) *disebut superset soft dari* (G, B), *jika* (G, B) *merupakan himpunan bagian soft dari* (F, A), *dan dinotasikan dengan* $(F, A) \tilde{\supseteq} (G, B)$. *Kemudian dua himpunan soft* (F, A) *dan* (G, B) *atas himpunan U dikatakan sama jika* (F, A) *merupakan himpunan bagian soft dari* (G, B) *dan* (G, B) *merupakan himpunan bagian soft dari* (F, A).

Menurut Maji, Biswar, & Roy (2003) definisi operasi irisan dan operasi gabungan pada himpunan *soft* sebagai berikut.

Definisi 2.5 (Maji et al., 2003)
Diberikan dua himpunan soft (F, A) *dan* (G, B) *atas himpunan* U.

1) *Irisan dari* (F, A) *dan* (G, B) *adalah himpunan soft* (H, C), *dengan* $C = A \cap B$ *dan untuk setiap* $x \in C$, $H(x) = F(x)$ *atau* $G(x)$. *Selanjutnya operasi irisan dari* (F, A) *dan* (G, B) *dinotasikan dengan* $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$.
2) *Gabungan dari* (F, A) *dan* (G, B) *adalah himpunan soft* (H, C), *dengan* $C = A \cup B$ *dan untuk setiap* $x \in C$ *berlaku*

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & untuk\ x < 0 \\ G(x), & untuk\ x \geq 0 \\ F(x) \cup G(x), & untuk\ x \in A \cap B \end{cases}$$

Operasi gabungan dari (F, A) *dan* (G, B) *dinotasikan dengan* $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$.

Definisi modul *soft* secara formal menurut Sun, Zhang, & Lui (2008) sebagai berikut.

Definisi 2.6 (Sun et al., 2008)
Diberikan modul M *atas ring R dengan elemen satuan. Himpunan soft* (F, A) *atas modul* M *disebut modul soft atas M jika dan hanya jika* $F(x)$ *merupakan submodul di* M *untuk setiap* $x \in A$.

Contoh 2.7
Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$. Dua himpunan *soft* (F, A), dan (G, B) atas modul $\mathbb{Z}$, dengan $A = 2\mathbb{N}$, $B = 4\mathbb{N}$, $F: A \to P(\mathbb{Z})$, dan $G: B \to P(\mathbb{Z})$ merupakan fungsi yang didefinisikan berturut-turut sebagai $F(a) = a\mathbb{Z}$ dan $G(b) = b\mathbb{Z}$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Karena $a\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$ untuk setiap $a \in A$, dan $b = 2x \in B$ untuk suatu $x \in A$, sehingga berdasarkan Definisi 2.6, (F, A) dan (G, B) merupakan modul *soft* atas $\mathbb{Z}$.

Contoh 2.8
Diberikan modul $M_2(\mathbb{Z})$ atas ring $\mathbb{Z}$, dan $B = \mathbb{N}$. Didefinisikan $G: B \to P\big(M_2(\mathbb{Z})\big)$ dengan

$$G(x) = xM_2(\mathbb{Z}) = \left\{ x\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

untuk setiap $x \in B$. Dapat ditunjukkan $xM_2(\mathbb{Z})$ merupakan submodul dari $M_2(\mathbb{Z})$. Akibatya (G, B) merupakan modul *soft* atas $M_2(\mathbb{Z})$.

Pada teori modul terdapat jumlah langsung dari dua buah modul, pada modul *soft* juga terdapat jumlah langsung pada definisi berikut.

Definisi 2.9 (Sun et al., 2008)

Diberikan (F, A) dan (G, B) merupakan dua modul soft atas modul M. Penjumlahan $(F, A) + (G, B)$ didefinisikan sebagai $(H, A \times B)$, dengan $H(x, y) = F(x) + G(y)$ untuk setiap $(x, y) \in (A \times B)$.

Contoh 2.10

Diberikan himpunan *soft* (F, A) dan (G, B) yang didefinisikan pada Contoh 2.7. Diperoleh $(F, A) + (G, B) = (H, A \times B)$, dengan $H(x, y) = (x + y)\mathbb{Z}$ untuk setiap $(x, y) \in (A \times B)$.

Selain jumlah langsung juga ada hasil kali pada modul *soft* dengan definisi hasilkali pada modul *soft* sebagai berikut.

Definisi 2.11 (Sun et al., 2008)**]**

Diberikan (F, A) merupakan modul soft atas modul M dan (G, B) merupakan modul soft atas modul N. Hasil kali $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B)$ dengan $H: A \times B \to P(M \times N)$ didefinisikan sebagai $H(x, y) = F(x) \times G(y)$ untuk setiap $(x, y) \in A \times B$.

Contoh 2.12

Diberikan himpunan *soft* (F, A) dan (G, B) yang didefinisikan berturut-turut pada Contoh 2.7 dan Contoh 2.8. Diperoleh $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B)$, dengan $H(x, y) = x\mathbb{Z} \times yM_2(\mathbb{Z})$ untuk setiap $(x, y) \in (A \times B)$.

Pada modul *soft*, subhimpunan dari modul *soft* dinamakan submodul *soft* jika memenuhi definisi berikut.

Definisi 2.13 (Sun et al., 2008)

Diberikan dua modul soft (F, A) dan (G, B) atas modul M. Modul soft (G, B) atas modul M merupakan submodul soft dari (F, A) jika

1) $B \subseteq A$

2) $G(x)$ merupakan submodul di $F(x)$, untuk setiap $x \in B$.

Dinotasikan dengan $(G, B) \lesssim (F, A)$.

Contoh 2.14

Diberikan himpunan *soft* (F, A) dan (G, B) yang didefinisikan pada Contoh 2.7. Karena $B \subset A$ dan $G(x) \subset F(x)$ untuk setiap $x \in B$ sedemikian sehingga $G(x)$ merupakan submodul dari $F(x)$, akibatnya berdasarkan Definisi 2.13 diperoleh $(G, B) \lesssim (F, A)$.

Pada modul *soft* terdapat suatu sifat yang disebut null modul *soft* dan absolut modul *soft*, dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.15 (Sun et al., 2008)

Diberikan modul soft (F, A) *atas modul* M, *jika*

1) *Modul soft* (F, A) *dikatakan null modul soft atas modul* M *jika* $F(x) = 0$ *untuk setiap* $a \in A$, *dengan* 0 *merupakan elemen nol dari* M.
2) *Modul soft* (F, A) *disebut absolut modul soft atas modul* M *jika* $F(x) = M$ *untuk setiap* $x \in A$.

METODE PENELITIAN

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

a) Mempelajari tentang teori-teori pendukung, yaitu diantaranya adalah modul, himpunan *soft* dan modul *soft*.
b) Menjelaskan definisi dan membuktikan operasi yang berlaku pada teori modul.
c) Menjelaskan definisi dari himpunan *soft*.
d) Menjelaskan definisi dan membuktikan operasi yang berlaku pada modul *soft*.
e) Menjelaskan definisi dan membuktikan sifat dan operasi yang berlaku pada submodul *soft*.
f) Membuktikan sifat modul *soft* yang dikomposisikan dengan homomorfisma modul.
g) Menuliskan semua hasil yang diperoleh dalam bentuk proposisi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam himpunan *soft* terdapat operasi irisan dan operasi gabungan yang dinyatakan dalam Definisi 2.5. Jika semesta himpunan *soft* adalah sebuah modul disebut modul *soft*. Hasil operasi irisan dan operasi gabungan dari dua modul *soft* merupakan modul *soft* yang dibuktikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.1

Diberikan dua modul soft (F, A) *dan* (G, B) *atas modul M.*

1) $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ *merupakan modul soft atas modul M jika* $A \cap B \neq \emptyset$.
2) $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ *merupakan modul soft atas modul M jika* $A \cap B = \emptyset$.

Bukti.

1) Berdasarkan Definisi 2.5(1), diketahui bahwa $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ merupakan himpunan *soft* atas modul M, dengan $C = A \cap B$ dan $H(x) = F(x)$ atau $H(x) = G(x)$ untuk setiap $x \in C$. Diberikan sebarang $x \in C$,
   a. Jika $H(x) = F(x)$ dan diketahui $F(x)$ merupakan submodul dari M maka $H(x)$ merupakan submodul dari M.
   b. Jika $H(x) = G(x)$ dan diketahui $G(x)$ merupakan submodul dari M maka $H(x)$ merupakan submodul dari M.

Berdasarkan (a) dan (b) terbukti bahwa $H(x)$ merupakan submodul dari M untuk setiap $x \in C$. Dengan kata lain, berdasarkan Definisi 2.6 terbukti bahwa $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ merupakan modul *soft* atas modul M.

2) Diketahui bahwa $A \cap B = \emptyset$ dan berdasarkan Definisi 2.5(2) $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ merupakan himpunan *soft*, dengan $C = A \cup B$ dan
$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in A - B \\ G(x), & x \in B - A \end{cases}.$$
Diberikan sebarang $x \in C$. Karena diketahui $A \cap B = \emptyset$ sehingga $x \in A - B$ atau $x \in B - A$. Jika $x \in A - B$ maka $H(x) = F(x)$ merupakan submodul dari M. Sedangkan jika $x \in B - A$ maka $H(x) = G(x)$ merupakan submodul dari M. Jadi $H(x)$ merupakan submodul dari M untuk setiap $x \in C$. Dengan kata lain, berdasarkan Definisi 2.6, $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ merupakan modul *soft* atas M. ■

Hasil operasi jumlahan dan jumlah langsung dari dua atau lebih modul membentuk suatu modul (Dummit & Foote, 2004). Hal in juga berlaku pada konsep modul *soft* yang ditunjukkan dalam Proposisi berikut.

Proposisi 4.2

Diberikan modul M atas ring R dengan elemen satuan. Jika (F, A) dan (G, B) merupakan dua modul soft atas modul M maka $(F, A) + (G, B)$ merupakan modul soft atas M.

Bukti

Diketahui (F, A) dan (G, B) merupakan dua modul *soft* atas M.
Berdasarkan Definisi 2.6, $F(x)$ dan $G(y)$ merupakan submodul di M untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$. Diketahui berdasarkan Definisi 2.9, $(F, A) + (G, B)$ didefinisikan sebagai $(H, A \times B)$, dengan $H(x, y) = F(x) + G(y)$ untuk setiap $(x, y) \in (A \times B)$. Akan ditunjukkan $(F, A) + (G, B)$ merupakan modul *soft* atas M. Diberikan sebarang $(x, y) \in A \times B$. Karena $F(x)$ dan $G(y)$ adalah submodul dari modul M sehingga berdasarkan Lemma 2.4 pada [2] diperoleh $H(x, y) = F(x) + G(y)$ merupakan submodul dari M. Akibatnya berdasarkan Definsi 2.6 $(F, A) + (G, B)$ merupakan modul *soft* atas modul M. ■

Proposisi 4.3

Jika $\{(G_i, B_i) | i \in \mathbb{N}\}$ merupakan koleksi tak kosong dari modul soft atas modul M maka $\sum_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ merupakan modul soft atas modul M.

Bukti

Berdasarkan Definisi 2.9 $\sum_{i=1}^{n}(G_i, B_i) = (H, B_1 \times B_2 \times ... \times B_n)$ dengan $H(x_1, x_2, ..., x_n) = G_1(x_1) + G_2(x_2) + \cdots + G_n(x_n)$ untuk setiap $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (B_1 \times B_2 \times ... \times B_n)$ merupakan himpunan *soft* atas modul M. Untuk menunjukkan $\sum_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ merupakan modul *soft* atas modul M dengan menggunakan induksi matematika.

a) Untuk $n = 2$, berdasarkan Proposisi 4.2 terbukti bahwa
$(G_1, B_1) + (G_2, B_2)$ merupakan modul *soft* atas modul M.

b) Asumsikan benar untuk $n = k$ yakni $\sum_{i=1}^{k}(G_i\,, B_i) = (H, B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k)$, dengan $H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = G_1(x_1) + G(x_2) + \cdots + G(x_k)$ untuk setiap $(x_{1,}x_2, \ldots, x_k) \in (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k)$ merupakan modul *soft* atas modul M.
c) Akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$ yakni $\sum_{i=1}^{k+1}(G_i\,, B_i) = (H, B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \times B_{k+1})$ dengan $H(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = G(x_1) + G(x_2) + \cdots + G(x_k) + G(x_{k+1})$ untuk setiap $(x_{1,}x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) \in (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \times B_{k+1})$ merupakan modul *soft* atas modul M.
   Berdasarkan asumsi, diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{k}(G_i\,, B_i) = (H, B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k)$ merupakan modul *soft* atas modul M akibatnya berdasarkan Proposisi 4.2 $\sum_{i=1}^{k+1}(G_i, B_i) = \sum_{i=1}^{k}(G_i\,, B_i) + (G_{k+1}, B_{k+1})$ merupakan modul *soft* atas modul M. Jadi terbukti bahwa $\sum_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ merupakan modul *soft* atas modul M untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ ■.

Pada konsep modul, hasil kali dua modul merupakan suatu modul. Hal ini juga berlaku pada modul *soft* yang ditunjukkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.4

Diberikan modul M dan N atas ring R dengan elemen satuan. Jika (F, A) dan (G, B) berturut-turut merupakan modul soft atas modul M dan N, maka $(F, A) \times (G, B)$ merupakan modul soft atas modul $M \times N$.

Bukti

Diberikan modul *soft* (F, A) atas modul M dan modul *soft* (G, B) atas modul N. Berdasarkan Definisi 2.6, $F(x)$ merupakan submodul di M untuk setiap $x \in A$ dan $G(y)$ merupakan submodul di N untuk setiap $y \in B$. Diketahui berdasarkan Definisi 2.11, $(F, A) \times (G, B)$ didefinisikan sebagai $(H, A \times B)$ dengan

$$H(x, y) = F(x) \times G(y) \text{ untuk setiap } (x, y) \in A \times B.$$

Diberikan sebarang $(x, y) \in A \times B$ dengan $x \in A$ dan $y \in B$. Karena $F(x)$ merupakan submodul di M dan $G(y)$ merupakan submodul di N sehingga terdapat $0_M \in F(x)$ dan $0_N \in G(y)$. Akibatnya $(0_M, 0_N) \in F(x) \times G(y)$ dengan kata lain $(x) \times G(y) \neq \emptyset$. Diberikan sebarang $x, r \in F(x)$ dan $y, s \in G(y)$, diketahui $F(x)$ merupakan submodul di M sehingga $x - r \in F(x)$dan $G(y)$ merupakan submodul di N sehingga $y - s \in G(y)$ akibatnya

$$(x - r, y - s) = (x, y) - (r, s) \in F(x) \times G(y).$$

a) Diberikan sebarang $x \in F(x)$, $y \in G(y)$ dan $r \in R$ sedemikian sehingga $r(x, y) = (rx, ry) \in F(x) \times G(y)$.

Berdasarkan (a) dan (b) akibatnya $F(x) \times G(y)$ submodul dari $M \times N$. Karena $F(x) \times G(y)$ submodul dari $M \times N$, akibatnya berdasarkan Definisi 2.6, $(F, A) \times (G, B)$ merupakan modul *soft* atas modul $M \times N$. ■

Dalam modul *soft* juga terdapat himpunan bagian yang disebut submodul *soft*. Pada submodul *soft* terdapat beberapa sifat yang ditunjukkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.5

Diberikan dua modul soft (F, A) dan (G, B) atas modul M. Jika $G(x) \subseteq F(x)$ untuk setiap $x \in B$ maka (G, B) merupakan submodul soft dari (F, A).

Bukti

Diberikan dua modul *soft* (F, A) dan (G, B) atas modul M.

1) Diketahui bahwa $G(x) \subseteq F(x)$ untuk setiap $x \in B$.
   Andaikan $x \in B$ tetapi $x \notin A$, sedemikian sehingga $F(x)$ tidak terdefinisi dan $G(x) \nsubseteq F(x)$. Ini bertentangan dengan yang diketahui. Akibatnya $B \subset A$ dan $G(x) \subseteq F(x)$ untuk setiap $x \in B$.
2) Karena diketahui $G(x) \subseteq F(x)$ dan $G(x), F(x)$ merupakan submodul, akibatnya $G(x)$ merupakan submodul $F(x)$.

Berdasarkan (1) dan (2) dan Definisi 2.13 terbukti bahwa (G, B) merupakan submodul *soft* dari (F, A). ■

Hasil operasi irisan dari dua atau lebih dari submodul merupakan submodul, tetapi gabungan dari dua submodul belum tentu merupakan submodul (Dummit & Foote, 2004). Hal ini berlaku juga pada modul *soft*. Akan tetapi gabungan dari beberapa modul *soft* merupakan modul *soft*, jika memenuhi syarat tertentuk yang dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.6

Diberikan modul soft (F, A) atas modul M. Jika $\{(G_i, B_i) | i \in \mathbb{N}\}$ merupakan koleksi tak kosong dari semua submodul soft di (F, A) maka

1) $\bigcap_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ merupakan submodul soft di (F, A) jika $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$.
2) $\bigcup_{i \in I}(G_i, B_i)$ merupakan submodul soft di (F, A) jika $B_i \cap B_j = \emptyset$ untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$.

Bukti

Diberikan modul *soft* (F, A) atas modul M. Diketahui $\{(G_i, B_i | i \in \mathbb{N}\}$ merupakan koleksi tak kosong dari semua submodul *soft* dari (F, A), berdasarkan Definisi 2.13 diperoleh, yakni $B_i \subset A$ dan $G_i(x)$ merupakan submodule di $F(x)$untuk setiap $x \in B_i$ dan $i \in \mathbb{N}$.

1) Berdasarkan Definisi 2.5(1) diperoleh $\bigcap_{i=1}^{n}(G_i, B_i) = (H, C)$ dengan $C = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$, untuk setiap $x \in C$, $H(x) = G_i(x)$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, n\}$. Untuk menunjukkan $\bigcap_{i=1}^{n}(G_i, B_i) = (H, C)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A) dengan menggunakan induksi matematika.
   a) Untuk $n = 2$ berdasarkan Proposisi 4.1(1) diperoleh $(G_1, B_1) \cap (G_2, B_2) = (H, C)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A) dengan $C = B_1 \cap B_2$, yakni untuk setiap $x \in C$, $H(x) = G_1(x)$ atau $H(x) = G_2(x)$ merupakan submodule dari $F(x)$.

b) Asumsikan benar bahwa untuk $n = k$, $\bigcap_{i=1}^{k}(G_i, B_i) = (H, C)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A) dengan $C = \bigcap_{i=1}^{k} B_i$, yakni untuk setiap $x \in C$, $H(x) = G_i(x)$ merupakan submodul dari $F(x)$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots, k\}$.

c) Akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$ yakni $\bigcap_{i=1}^{k+1}(G_i, B_i) = (H, C)$ merupakan submodule *soft* dari (F, A) dengan $C = \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i = \bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap B_{k+1}$. Berdasarkan asumsi $\bigcap_{i=1}^{k}(G_i, B_i)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A). Akibatnya berdasarkan Proposisi 4.1(1) diperoleh $\bigcap_{i=1}^{k+1}(G_i, B_i) = \bigcap_{i=1}^{k}(G_i, B_i) \cap (G_{k+1}, B_{k+1}) = (H, C)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A) dengan $C = \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i$.

Berdasarkan (a), (b), (c), dan diketahui bahwa $B_i \subset A$ akibatnya berdasarkan Definisi 2.13, $\bigcap_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ merupakan submodul *soft* di (F, A) jika $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$.

2) Berdasarkan Definisi 2.5(2) diperoleh $\bigcup_{i=1}^{n}(G_i, B_i) = (H, C)$ dengan $C = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Untuk $x \in C, H(x) = G_i(x)$ untuk setiap $x \in B_i - \cup_j B_j$, dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \mathbb{N}$. Untuk menunjukkan $\bigcup_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A) dengan menggunakan induksi matematika.

a) Untuk $n = 2$ berdasarkan Proposisi 4.1(2) diperoleh $(G_1, B_1) \cup (G_2, B_2) = (H, C)$dengan $C = B_1 \cup B_2$dan
$$H(x) = \begin{cases} G_1(x), & x \in B_1 - B_2 \\ G_2(x), & x \in B_2 - B_1 \end{cases}.$$
Diketahui bahwa $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, akibatnya $x \in B_1 - B_2$ atau $x \in B_2 - B_1$ sehingga diperoleh $H(x) = G_1(x)$ atau $H(x) = G_2(x)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A).

b) Asumsikan benar untuk $n = k$ yakni $\bigcup_{i=1}^{k}(G_i, B_i) = (H, C)$ dengan $C = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ merupakan submodul *soft* dari (F, A), yakni untuk $x \in C, H(x) = G_i(x)$ merupakan submodul dari $F(x)$ untuk setiap $x \in B_i - \cup_j B_j$, dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \mathbb{N}$.

c) Akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$ yakni $\bigcup_{i=1}^{k+1}(G_i, B_i) = (H, C)$ dengan $C = \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$, $H(x) = G_i(x)$ untuk setiap $x \in B_i - \cup_j B_j$, dengan $i \neq j$ dan $i, j \in \mathbb{N}$ merupakan submodul *soft* dari (F, A). Berdasarkan asumsi diketahui bahwa $\bigcup_{i=1}^{k}(G_i, B_i)$ merupakan submodul soft dari (F, A), sedemikian sehingga berdasarkan Proposisi 4.1(2) diperoleh
$$\bigcup_{i=1}^{k+1}(G_i, B_i) = \bigcup_{i=1}^{k}(G_i, B_i) \cup (G_{k+1}, B_{k+1}) = (H, C),$$
dengan $C = \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$ merupakan submodul *soft* dari (F, A).

Berdasarkan (a), (b), (c) dan diketahui $B_i \subset A$, akibatnya berdasarkan Definisi 2.13, $\bigcup_{i=1}^{n}(G_i, B_i)$ merupakan submodul *soft* dari (F, A) ■.

Jika suatu homomorfisma modul dikaitkan dengan image dari modul *soft* maka akan membentuk modul *soft* yang dinyatakan pada proposisi berikut.

Proposisi 4.7
Jika diberikan dua modul soft (F, A) *dan* (G, B) *atas modul* M, *dan misalkan* $f: M \to N$ *merupakan homomorfisma modul. Didefinisikan* $(f(F), A)$ *dan* $(f(G), B)$ *berturut turut, yakni* $f(F): A \to P(N)$ *dengan* $f(F)(a) \coloneqq f\big(F(a)\big) = \{c \in N | c = f(x), x \in F(a)\}$ *maka* $(f(F), A)$ *dan* $(f(G), B)$ *merupakan modul soft atas modul* N.
Bukti
Diketahui f homomorfisma dari M ke N, dan (F, A) dan (G, B) merupakan modul *soft* atas modul M. Diberikan sebarang $a, b \in A$ dengan $a = b$. Karena diketahui F merupakan suatu pemetaan sehingga diperoleh $F(a) = F(b)$. Lebih lanjut, diketahui juga bahwa f merupakan suatu pemetaan dari M ke N akibatnya

$$f(F)(a) = f\big(F(a)\big) = f\big(F(b)\big) = f(F)(b).$$

Jadi, terbukti bahwa $f(F)$ terdefinisi dengan baik. Karena diketahui $F(a)$ merupakan subset di M akibatnya $f\big(F(a)\big)$ merupakan subset di N untuk setiap $a \in A$. Jadi terbukti bahwa $f(F): A \to P(N)$ merupakan suatu pemetaan. Dengan kata lain, $(f(F), A)$ merupakan suatu himpunan *soft*.
Untuk menunjukkan $(f(F), A)$ dan $(f(G), B)$ merupakan modul *soft* atas modul N cukup ditunjukkan $f\big(F(a)\big)$ dan $f\big(G(b)\big)$ merupakan submodul dari modul N. Karena $F(a)$ dan $G(b)$ merupakan submodul dari modul M dan berdasarkan Teorema 3.1 pada [5] diperoleh bahwa $f\big(F(a)\big)$ dan $f\big(G(b)\big)$ merupakan submodul di N. Akibatnya berdasarkan Definsi 2.6 diperoleh bahwa $(f(F), A)$ dan $(f(G), B)$ merupakan modul *soft* atas modul N. ■

Jika himpunan soft (G, B) merupakan submodul *soft* dari modul soft (F, A) atas modul M dan terdapat homomorfisma modul dari M ke N maka berdasarkan Proposisi 4.7 $(f(G), B)$ dan $(f(F), A)$ merupakan modul *soft* atas N. Karena diketahui (G, B) merupakan submodul *soft* dari modul *soft* (F, A) akibatnya $(f(G), B)$ merupakan submodul *soft* dari $(f(F), A)$ yang dinyatakan dalam proposisi berikut.
Proposisi 4.1.8
Diberikan modul soft (F, A) *dan* (G, B) *atas modul* M *dan homomorfisma modul* $f: M \to N$ *atas ring* R. *Jika* $(G, B) \precapprox (F, A)$ *maka* $(f(G), B) \precapprox (f(F), A)$.
Bukti
Diketahui bahwa (G, B) merupakan submodul dari (F, A). Berdasarkan Definisi 2.13 diperoleh bahwa $B \subseteq A$ dan $G(b)$ merupakan submodul dari $F(b)$ untuk setiap $b \in B$. Diambil sebarang $d \in f\big(G(b)\big)$ dengan $d = f(y)$, untuk suatu $y \in G(b)$. Diketahui bahwa $G(b)$ merupakan submodul dari $F(b)$ untuk setiap $b \in B$, sehingga $y \in F(b)$. Akibatnya $d = f(y), y \in F(b)$. Oleh karena itu, $d \in F\big(f(b)\big)$.

Dengan kata lain, $f\big(G(b)\big)$ merupakan submodul dari $f\big(F(b)\big)$ untuk setiap $b \in B$. Berdasarkan Definsi 2.13, diperoleh $(f(G), B) \widetilde{<} (f(F), A)$. ■

Jika f merupakan suatu homomorfisma dan $F(x) = \ker(f)$ maka membentuk null modul *soft* dan jika f merupakan suatu epimorfisma dan $F(x) = M$ maka membentuk absolut modul *soft* yang dinyatakan pada proposisi berikut.

Proposisi 4.9

Diberikan modul M, N dan modul soft (F, A) atas modul M

1) *Diberikan $f: M \to N$ merupakan suatu homomorfisma. Jika $F(x) = Ker(f)$ untuk setiap $x \in A$, maka $(f(F), A)$ merupakan null modul soft atas modul N.*
2) *Jika (F, A) merupakan absolut modul soft atas modul M dan $f: M \to N$ merupakan suatu epimorfisma, maka $(f(F), A)$ merupakan absolut modul soft atas modul N.*

Bukti

Diberikan modul *soft* (F, A) atas modul M, sehingga berdasarkan Definisi 2.6 $F(x)$ merupakan submodul di M.

1) Diketahui f suatu homomorfisma dari modul M ke N dan $F(x) = ker\ (f)$ untuk setiap $x \in A$. Karena diketahui $F(x) = \ker(f)$ sedemikian sehingga
$$f\big(F(x)\big) = \{y \in N | y = f(x), x \in \ker\ (f)\} = \{y \in N | y = 0\} = \{0\}.$$
Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.15, diperoleh $(f(F), A)$ merupakan null modul *soft* atas modul N.
2) Diberikan f suatu epimorfisma dari modul M ke N. Diketahui bahwa (F, A) merupakan absolut modul *soft* atas modul M, berdasarkan Definisi 2.15 diperoleh $F(x) = M$ untuk setiap $x \in A$. Diberikan sebarang $x \in A$ dengan $f\big(F(x)\big) = \{y \in N | y = f(x), x \in F(x)\}$.
Karena diketahui f merupakan suatu epimorfisma ini berarti semua elemen di N merupakan suatu image dari f. Dengan kata lain, $f(M) = N$. Akibatnya $f\big(F(x)\big) = f(M) = N$ untuk setiap $x \in A$.
Berdasarkan Definisi 2.15 diperoleh $(f(F), A)$ merupakan absolut modul *soft* atas modul N. ■

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari penelitian ini dapat disimpulkan

1. Operasi irisan, gabungan, jumlah langsung, dan hasilkali dua atau lebih dari modul-modul *soft* merupakan modul *soft*.
2. Himpunan bagian *soft* dari modul *soft* merupakan submodul *soft* jika himpunan pemetaan dari himpunan bagian *soft* tersebut merupakan submodul dari himpunan pemetaan modul *soft*.
3. Operasi irisan, gabungan dari dua atau lebih dari submodul *soft* dalam suatu modul *soft* merupakan submodul *soft*.

4. Hasil dari homomorfisma modul yang dikomposisikan dengan modul *soft* menghasilkan modul *soft*.
5. Diberikan homomorfisma modul f dari modul M ke N. Jika modul *soft* (F, A) atas modul M didefinisikan dengan $F(x) = \ker(f)$, maka hasil dari komposisi f dengan F merupakan null modul *soft*. Lebih lanjut, jika f merupakan epimorfisma dan modul *soft* (F, A) atas modul M didefinisikan dengan $F(x) = M$ maka hasil dari komposisi f dengan F merupakan absolut modul *soft*.

REFERENSI

Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Algebra : An Approach Via Module Theory* (S. Axler, F. W. Gehring, & K. A. Ribet (eds.)). Springer-Verlag.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (Third Edit). John Wiley and Sons Inc.

Gunduz, Cigdem;, & Bayramov, S. (2011). Fuzzy Soft Modules. *International Mathematical Forum*, *6*(11), 517–527.

Gunduz, Cigdem, & Bayramov, S. (2011). Intuitionistic fuzzy soft modules. *Computers and Mathematics with Applications*, *62*(6), 2480–2486. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.07.036

Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, *45*(4–5), 555–562. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00016-6

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory first results. *Journal Computers and Mathematics with Applications*, *37*(4–5), 19–31. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5

Sun, Q. M., Zhang, Z. L., & Liu, J. (2008). Soft sets and soft modules. *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, *5009 LNAI*, 403–409. https://doi.org/10.1007/978-3-540-79721-0_56

Taouti, A., Salami, A., Karkain, S., Abdelwahed, I., & Alhosany, S. (2019). Note on soft modules. *Applied Mathematical Sciences*, *13*(19), 907–910. https://doi.org/10.12988/ams.2019.98117

Türkmen, E., & Pancar, A. (2013). On some new operations in soft module theory. *Neural Computing and Applications*, *22*(6), 1233–1237. https://doi.org/10.1007/s00521-012-0893-6

Xiang, D. (2013). Soft module theory. *Proceedings - 2013 10th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, FSKD 2013*, 103–107. https://doi.org/10.1109/FSKD.2013.6816175

Xiao, G., Xiang, D., & Zhan, J. (2012). Fuzzy Soft Modules. *East Asian Mathematical Journal*, *28*(1), 1–11. https://doi.org/10.7858/eamj.2012.28.1.001

Yücel, C., Acar, C., & Ummahan, U. (2017). A note on soft modules. *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, *66*(1), 66. https://doi.org/10.1501/commua1_0000000775