Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol. 5 No.2 Desember 2011: 19 - 30

Analisis Kestabilan Global Model Epidemik SIRS menggunakan Fungsi Lyapunov

Yuni Yulida[1], Faisal[2], Muhammad Ahsar K.[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika FMIPA Unlam
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 35,8 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: y_yulida@yahoo.com

ABSTRAK

Pada tulisan ini disajikan model epidemik SIRS. Selanjutnya, dari model tersebut diselidiki eksistensi titik ekuilibrium, dan kestabilan global titik ekuilibrium menggunakan fungsi Lyapunov.

Kata kunci: *Model Epidemik SIRS, titik ekuilibrium, kestabilan global, fungsi Lyapunov*

ABSTRACT

This paper considers SIRS epidemic model. From the model we study existence equilibrium states and global stability of equilibrium states using Lyapunov functions.

Key words: *SIRS epidemic model, equilibrium state, global stability, Lyapunov functions.*

1. PENDAHULUAN

Model penyebaran penyakit pertama kali dikemukakan oleh Kermack & Mckendrick pada tahun 1927, yaitu model epidemik SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model ini disusun secara deterministik untuk menggambarkan sifat penyebaran penyakit yang berbentuk Sistem Persamaan Diferensial nonlinier. Model ini terus diperbaiki oleh ilmuwan-ilmuwan sesudahnya, diantaranya oleh H. E. Soper (1929), dan Hetchote (1976).

Selanjutnya, model-model lain seperti SIRS, SIS, SI dan lainnya dikembangkan oleh ilmuwan sesudahnya. Model SIRS adalah model penyebaran penyakit yang dikembangkan dari model SIR Kermack & Mckendrick. Model SIRS terjadi karena individu yang telah sembuh dari sakit akan mengalami kekebalan, tetapi hanya sementara, selanjutnya kekebalan akan menurun dan pada akhirnya hilang. Kemudian pada saat kekebalan menghilang maka individu tersebut masuk dalam populasi rentan *(Susceptible*).

Salah satu masalah klasik yang sering dihadapi dalam epidemiologi matematika adalah menganalisis kestabilan global titik ekuilibrium. Kestabilan itu sendiri ada yang bersifat lokal dan bersifat global. Kestabilan lokal mudah ditentukan dengan pendekatan linier. Sedangkan sifat global cukup sulit ditentukan.

Pada tulisan ini, model epidemik SIRS diselidiki eksistensi titik ekuilibrium. Selanjutnya, akan menggunakan fungsi Liapunov untuk menganalisis kestabilan global model tersebut.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial, Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya

Diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.1}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E \subset \mathbb{R}^n, \boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ dan kondisi awal $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in E$. Notasi $x(t) = x(x_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (2.1.1) yang melalui x_0. Selanjutnya, diberikan definisi titik ekuilibrium Sistem (1) sebagai berikut.

Definisi 1 [11]

Titik $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (2.1.1) jika $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$.

Diberikan sistem persamaan diferensial linier homogen sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x} \tag{2.1.2}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E \subset \mathbb{R}^n$ dan A matriks ukuran $n \times n$.
Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.3}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$dan $\boldsymbol{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fungsi kontinu pada E. Sistem (2.1.3) disebut sistem persamaan diferensial nonlinear jika terdapat fungsi f_i pada Sistem (2.1.3) yang nonlinear dan tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2.1.2).

Definisi 2 [13]

*Titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ pada Sistem (*2.1.3*) dikatakan*:

a) *Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi Sistem (3) **x**(t) yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka berakibat $\|\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.*
b) *Stabil asimtotik jika titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi Sistem (*2.1.3*) **x**(t) yang memenuhi $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \hat{\boldsymbol{x}}\| < \delta_0$ maka berakibat $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}$.*
c) *Tidak stabil jika titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ tidak memenuhi (a).*

Selanjutnya diberikan definisi kestabilan global titik ekuilibrium pada Sistem (2.1.3).

Definisi 3 [3]

*Titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ pada Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (*2.1.3*) dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal $\boldsymbol{x}(t_0)$ yang diberikan, setiap solusi Sistem tersebut yaitu **x**(t) dengan $t \to \infty$ menuju titik ekuilibrium $\hat{\boldsymbol{x}}$.*

2.2 Himpunan Invariant dan Fungsi Liapunov

Berikut diberikan Definisi 4 tentang pengertian himpunan invariant dan Definisi 5 tentang pengertian fungsi Lyapunov.

Definisi 4 [12]
*Diberikan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (*2.1.3*) dengan* $E \subset \mathbb{R}^n$ *dan* $M \subset E$. *Himpunan* M *disebut himpunan invariant terhadap Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (*2.1.3*), jika* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \in M$ *maka* $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t) \in M$ *untuk setiap* $t \in \mathbb{R}$.

Fungsi Lyapunov dari suatu sistem persamaan diferensial tidak tunggal, asalkan fungsi tersebut memenuhi tiga pernyataan yang diberikan oleh definisi fungsi Liapunov berikut ini.

Definisi 5 [10]
Diberikan fungsi $V: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *dan* $\hat{\boldsymbol{x}} \in E$ *titik ekuilibrium Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (*2.1.3*). Fungsi V disebut fungsi Liapunov jika memenuhi ketiga pernyataan berikut:*

a) *Fungsi V kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada E atau* $V \in C'(E)$.
b) *Fungsi* $V(\boldsymbol{x})>0$ *untuk* $\boldsymbol{x} \in E$ *dengan* $\boldsymbol{x} \neq \hat{\boldsymbol{x}}$, *dan* $V(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$ *dengan* $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$ *(dengan titik ekuilibrium* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *merupakan titik minimum global).*
c) *Fungsi* $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in E$.

Berikut diberikan beberapa fungsi Liapunov

1. Fungsi Liapunov Logaritma diperkenalkan oleh Goh untuk Sistem Lokta-Volterra

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_i{}^* - x_i{}^* ln \frac{x_i}{x_i{}^*} \right)$$

2. Fungsi Liapunov kuadratik bersama (common quadratic Liapunov functions)

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} (x_i - x_i{}^*)^2$$

3. Fungsi Liapunov kuadratik komposittt (composite quadratic function)

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tfrac{c}{2} \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i{}^*) \right]^2.$$

Berikut diberikan teorema yang akan digunakan untuk menganalisis sifat kestabilan global titik ekuilibrium Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (3). **[8]**

Teorema 6 [2]
*Diberikan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (*2.1.3*) dengan* $E \subset \mathbb{R}^n$. *Jika terdapat fungsi Lyapunov V , dengan*

(i) $E_k = \{ \boldsymbol{x} \in E \,|\, V(\boldsymbol{x}) \leq k \}$ *untuk suatu* $k > 0$, *merupakan himpunan terbatas,*

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x} \in E_k$ *,dan*

(iii) terdapat M himpunan invariant terbesar dalam $H=\left\{\boldsymbol{x}\in E_k \,\middle|\, \dot{V}(\boldsymbol{x})=0\right\}$,
maka setiap solusi $\boldsymbol{x}(t)$ *menuju ke M untuk* $t\to\infty$.

Akibat 7 [2]
*Diberikan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier (*2.1.3*) dengan* $E\subset\mathbb{R}^n$. *Jika terdapat fungsi Lyapunov V, dengan*
(i) $E_k=\left\{\boldsymbol{x}\in E \,\middle|\, V(\boldsymbol{x})\le k\right\}$ *untuk suatu* $k>0$, *merupakan himpunan terbatas,*
(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\le 0$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x}\in E_k$ *,dan*
(iii) $H=\left\{\boldsymbol{x}\in E_k \,\middle|\, \dot{V}(\boldsymbol{x})=0\right\}$ *tidak memuat solusi kecuali titik ekuilibrium* $\hat{\boldsymbol{x}}=0$
maka $\hat{\boldsymbol{x}}$ *stabil asimtotik lokal. Selanjutnya jika* E_k *merupakan E, maka titik ekuilibrium tersebut stabil asimtotik global.*

2.3 Himpunan Konveks dan Fungsi Konveks

Teorema 8 [9]
Diberikan A matriks simetris real berukuran nxn
1. *Matriks A semidefinit positif jika dan hanya jika nilai eigen* $\lambda_i\ge 0$ *untuk* $i=1,2,3,\dots,n$.
2. *Matriks A definit positif jika dan hanya jika nilai eigen* $\lambda_i>0$ *untuk* $i=1,2,3,\dots,n$.

Definisi 9 [1]
Diberikan himpunan $K\subseteq\mathbb{R}^n, K\neq\emptyset$, *K disebut himpunan konveks dalam* $\mathbb{R}^n$ *jika berlaku untuk setiap* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$, $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in K$ *dengan* $\lambda\in[0,1]$.

Definisi 10 [5]
Diberikan fungsi $f\colon K\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $K\neq\emptyset$, *dan* $f\in C^2(K)$. *Matriks*

$$H(\hat{\boldsymbol{x}})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\hat{\boldsymbol{x}}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\hat{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\hat{\boldsymbol{x}})\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(\hat{\boldsymbol{x}}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\hat{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(\hat{\boldsymbol{x}})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\hat{\boldsymbol{x}}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(\hat{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\hat{\boldsymbol{x}})\end{bmatrix}$$

disebut matriks Hessian di titik $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Teorema 11 [1]
Diberikan fungsi $f\colon K\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $K\neq\emptyset$, *K himpunan konveks dan* $f\in C^2(K)$. *Fungsi f konveks pada K jika dan hanya jika matriks Hessian* $H(\hat{\boldsymbol{x}})$ *semidefinit positif untuk setiap* $\boldsymbol{x}\in K$. *SElanjutnya, Jika matriks Hessian* $H(\hat{\boldsymbol{x}})$ *definit positif untuk setiap* $\boldsymbol{x}\in K$ *maka f fungsi konveks tegas*

Teorema 12 [1]
Diberikan fungsi $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(K)$. *Jika* $Df(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$ *dan* $H(\hat{\boldsymbol{x}})$ *definit positif maka* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *titik minimum lokal.*

Teorema 13 [1]
Diberikan fungsi $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K \neq \emptyset$, *K himpunan konveks. Jika f fungsi konveks tegas pada K maka titik minimum lokal* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *dari f sekaligus merupakan titik minimum global dan tunggal.*

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun prosedur pada penelitian ini adalah mempelajari materi yang berhubungan dengan model epidemik SIR dan SIRS, Sistem Persamaan Diferensial Linear dan nonlinear serta kestabilan global titik ekuilibrium, membuat asumsi-asumsi, mendefinisikan parameter yang digunakan pada model. Setelah itu, membuat diagram transfer model berdasarkan asumsi-asumsi. Dari diagram transfer tersebut terbentuk model epidemik SIRS. Selanjutnya menentukan titik-titik ekuilibrium model tersebut serta menganalisa sifat kestabilan global titik-titik ekuilibrium model dengan menggunakan fungsi Lyaponuv.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Pembentuan Model SIRS

Pada model SIRS ini diasumsikan populasi dibagi menjadi 3 (tiga) , yaitu

a. Populasi yang rentan terhadap penyakit (virus)
b. Populasi yang sakit (terinfeksi virus).
c. Populasi yang sembuh dari sakit dan memiliki kekebalan.

Selanjutnya, didefinisikan variabel-variabel pada model SIRS, yaitu

S(t)=S menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit (virus) dalam populasi pada saat *t* (waktu)

I(t)=I menyatakan jumlah individu yang sakit (terinfeksi virus) dalam populasi pada saat *t.*

R(t)=R menyatakan jumlah individu yang sembuh dan memiliki kekebalan pada saat *t.*

Parameter-parameter yang digunakan dalam model SIRS adalah

Λ	Menyatakan banyaknya individu baru yang masuk ke populasi rentan terhadap penyakit (virus) akibat adanya kelahiran dan imigrasi
μ	Menyatakan laju kematian alami per kapita
α	Menyatakan laju kematian karena penyakit (secara medis)
ϕ	Menyatakan laju kesembuhan (laju pada saat individu yang sakit (terinfeksi) menjadi individu rentan)
β	Menyatakan laju penularan penyakit.
γ	Menyatakan laju penurunan kekebalan terhadap penyakit.

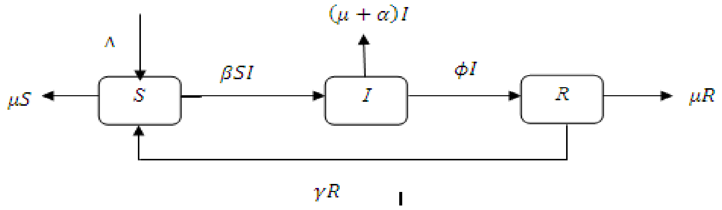
Semua parameter diasumsikan bernilai positif.

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan selain yang telah disebutkan di atas adalah

1. Populasi terbuka (terdapat kelahiran, imigrasi dan kematian).
2. Individu yang sakit (terinfeksi virus) dapat mengalami kematian.

3. Individu yang telah sembuh dari sakit memiliki kekebalan yang bersifat sementara.
4. Pada individu yang telah sembuh, jika kekebalan (terhadap penyakit) menghilang maka individu tersebut masuk dalam populasi rentan.
5. Populasi bersifat homogen (kemungkinan tertular penyakit diasumsikan sama setiap individu).
6. Individu rentan akan tertular penyakit jika melakukan kontak dengan individu yang sakit.

Berikut diagram transfer model SIRS



Gambar 1. Diagram transfer model SIRS

Berdasarkan diagram transfer di atas diperoleh model SIRS sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S + \gamma R \tag{4.1.1a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \alpha + \phi)I \tag{4.1.1b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \phi I - (\mu + \gamma)R. \tag{4.1.1c}$$

Jumlah individu dalam populasi dinyatakan $N(t)=N$, dengan $N = S + I + R$. Akibatnya,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \Lambda - \mu N - \alpha I \tag{4.1.2}$$

Jadi jumlah populasi bervariasi bergantung terhadap waktu.

Kemudian dari Persamaan (4.1.2), Jika populasi terbebas dari penyakit maka $\frac{dN}{dt} + \mu N = \Lambda$. (4.1.3)

Penyelesaian Persamaan (4.1.3) adalah $N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + Ce^{-\mu t}$,

jika disubtitusi syarat awal $N(0) = N_0$ maka diperoleh solusi khusus

$$N(t) = N_0 e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

Jika t membesar maka diperoleh $\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$. Jadi dapat dijelaskan jumlah populasi manusia dalam jangka waktu yang panjang menuju kapasitas batas yaitu $\frac{\Lambda}{\mu}$. Selanjutnya dalam penelitian ini diasumsikan bahwa jumlah populasi manusia $N \le \frac{\Lambda}{\mu}$, untuk setiap $t \ge 0$. Jadi solusi untuk model (4.1.1) didefinisikan dalam daerah $\Gamma = \left\{(S, I, R) \epsilon \mathbb{R}^3_+ : S \ge 0; I \ge 0; R \ge 0; S + I + R \le \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$.

4.2 Titik ekuilibrium Model SIRS

Titik ekuilibrium pada model SIRS ini terdiri dari titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit artinya populasi terbebas dari penyakit. Sedangkan titik ekuilibrium endemik berarti dalam populasi terjadi wabah penyakit.

Pertama akan ditentukan titik ekuilibrium bebas penyakit, misalkan titik tersebut disimbolkan $T_1 = (S^0, I^0, R^0)$. Karena populasi terbebas dari penyakit maka $I^0 = 0$. Berdasarkan Definisi 1, titik ekuilibrium bebas penyakit ini harus memenuhi

$$\Lambda - \beta S^0 I^0 - \mu S^0 + \gamma R^0 = 0 \tag{4.1.4a}$$
$$\beta S^0 I^0 - (\mu + \alpha + \phi) I^0 = 0 \tag{4.1.4b}$$
$$\phi I^0 - (\mu + \gamma) R^0 = 0 \tag{4.1.4c}$$

Dengan mensubstitusi $I^0 = 0$ ke Persamaan (4.1.4a), (4.1.4b) dan (4.1.4c) diperoleh $S^0 = \frac{\Lambda}{\mu}$ dan $R^0 = 0$. Jadi diperoleh titik ekuilbrium bebas penyakit $T_1 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$.

Sebelum menentukan titik ekuilibrium endemik pada model, diberikan *basic reproduction number* yaitu R_0 yang didefinisikan sebagai jumlah individu dalam populasi yang terinfeksi baru yang diproduksi dari satu individu terinfeksi pada saat semua individu rentan. Laju satu individu terinfeksi menularkan ke individu baru (rentan) adalah βS. Jika ke semua individu rentan maka $S = S^0 = \frac{\Lambda}{\mu}$, dan karena rentang waktu hidup manusia yang sakit (terinfeksi) adalah $\frac{1}{\mu+\alpha+\phi}$, berarti $R_0 = \frac{\beta S^0}{(\mu+\alpha+\phi)} = \frac{\beta \Lambda}{\mu(\mu+\alpha+\phi)}$. (4.1.5)

Selanjutnya ditentukan titik ekuilibrium endemik, misal disimbolkan $T_2 = (S^*, I^*, R^*)$. Karena dalam populasi terdapat wabah penyakit berarti $I^* \neq 0$. Titik ekuilibrium endemik ini harus memenuhi

$$\Lambda - \beta S^* I^* - \mu S^* + \gamma R^* = 0 \tag{4.1.6a}$$
$$\beta S^* I^* - (\mu + \alpha + \phi) I^* = 0 \tag{4.1.6b}$$
$$\phi I^* - (\mu + \gamma) R^* = 0 \tag{4.1.6c}$$

Dari Persamaan (4.1.6b) diperoleh hubungan

$[\beta S^* - (\mu + \alpha + \phi)] I^* = 0$.

Karena $I^* \neq 0$ maka

$$\beta S^* - (\mu + \alpha + \phi) = 0 \Leftrightarrow S^* = \frac{(\mu+\alpha+\phi)}{\beta} = \frac{\Lambda}{\mu R_0} = \frac{S^0}{R_0} \tag{4.1.7}$$

Substitusi Persamaan (4.1.7) ke Persamaan (4.1.6a) diperoleh

$$\Lambda - (\mu + \alpha + \phi) I^* - \frac{\Lambda}{R_0} + \gamma R^* = 0 \tag{4.1.8a}$$

Selanjutnya dari Persamaan (4.1.6c) diperoleh

$$(\mu + \gamma) R^* = \phi I^* \Leftrightarrow R^* = \frac{\phi I^*}{(\mu+\gamma)} \tag{4.1.8b}$$

Substitusi Persamaan (4.1.8a) dan Persamaan (4.1.8b) ke Persamaan (4.1.7) diperoleh

$$\Lambda - (\mu + \alpha + \phi) I^* - \frac{\Lambda}{R_0} + \frac{\gamma \phi I^*}{(\mu + \gamma)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - I^* \left((\mu + \alpha + \phi) - \frac{\gamma \phi}{(\mu + \gamma)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda}{R_0}(R_0 - 1) - I^* \left(\frac{(\mu + \alpha + \phi)(\mu + \gamma) - \gamma \phi}{(\mu + \gamma)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{(\mu+\alpha+\phi)(\mu+\gamma)(R_0-1)}{\beta[\phi\mu + (\mu+\gamma)(\mu+\alpha)]}, \quad R_0 > 1. \tag{4.1.9}$$

Substitusi Persamaan (4.1.9) ke Persamaan (4.1.8a)

$$R^* = \frac{\phi(\mu+\alpha+\phi)(R_0-1)}{\beta[\phi\mu+(\mu+\gamma)(\mu+\alpha)]}, \quad R_0 > 1 \tag{4.1.10}$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium endemik

$$T_2 = (S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(\mu+\alpha+\phi)}{\beta}, \frac{(\mu+\alpha+\phi)(\mu+\gamma)(R_0-1)}{\beta[\phi\mu+(\mu+\gamma)(\mu+\alpha)]}, \frac{\phi(\mu+\alpha+\phi)(R_0-1)}{\beta[\phi\mu+(\mu+\gamma)(\mu+\alpha)]}\right),$$

asalkan $R_0 > 1$.

4.3 Kestabilan Titik Ekuilibrium pada Model SIRS

Pada bagian ini untuk mengetahui kestabilan global titik ekuilibrium pada model akan dibangun fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov dibangun dari kombinasi fungsi kuadratik komposit, kuadratik bersama, fungsi logaritma dan fungsi linier.

Teorema 14

Titik ekuilibrium bebas penyakit T_1 dari model SIRS (4.1.1) stabil asimtotik global pada Γ jika $R_0 \leq 1$.

Bukti

Didefinisikan $W: \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
dengan fungsi

$$W(S,I,R) = \frac{1}{2}[(S-S^0)+I+R]^2 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta} I + \frac{(\alpha+2\mu)}{2\phi} R^2. \tag{4.1.11}$$

Berdasarkan Definisi 5, fungsi *W* adalah fungsi Liapunov karena memenuhi

1. Fungsi (4.1.11) terdiri dari fungsi kuadratik dan fungsi linier, jelas bahwa fungsi tersebut adalah fungsi yang kontinu pada Γ. Kemudian turunan parsial pertama juga kontinu.
2. Untuk sebarang $T = (S,I,R) \epsilon\, \Gamma$ dengan $T \neq T_1$ maka $W(T) = \frac{1}{2}(S-S^0)^2 > 0$, selanjutnya jika $T = T_1$ maka $W(T) = 0$.
3. Turunan fungsi $W(S,I,R)$ terhadap *t* adalah

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \frac{\partial W}{\partial S}\frac{dS}{dt} + \frac{\partial W}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial W}{\partial R}\frac{dR}{dt} \\
&= [(S-S^0)+I+R]\frac{dS}{dt} + \left[(S-S^0)+I+R+\frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\right]\frac{dI}{dt} + \\
&\qquad \left[(S-S^0)+I+R+\frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}R\right]\frac{dR}{dt} \\
&= [(S-S^0)+I+R](\Lambda-\mu(S+I+R)-\alpha I) + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}(\beta SI - \\
&\qquad (\mu+\alpha+\phi)I) + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}R(\phi I-(\mu+\gamma)R).
\end{aligned}$$

Karena $\Lambda = \mu S^0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= [(S-S^0)+I+R](\mu S^0-\mu(S+I+R)-\alpha I) \\
&\qquad + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}(\beta SI-(\mu+\alpha+\phi)I) + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(\phi RI-(\mu+\gamma)R^2). \\
&= [(S-S^0)+I+R](-\mu(S-S^0)-\mu S^0-(\mu+\alpha)I-\mu R) \\
&\qquad +(\alpha+2\mu)SI - \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}(\mu+\alpha+\phi)I + (\alpha+2\mu)RI - \\
&\qquad \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(\mu+\gamma)R^2. \\
&= -\mu\big((S-S^0)+R\big)^2 - (\mu+\alpha)I^2 - \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(\mu+\gamma)R^2 \\
&\qquad -(\alpha+2\mu)\left[\frac{(\mu+\alpha+\phi)}{\beta} - S^0\right]I
\end{aligned}$$

$$= -\mu\big((S - S^0) + R\big)^2 - (\mu + \alpha)I^2 - \frac{(\alpha + 2\mu)}{\phi}(\mu + \gamma)R^2 - (\alpha + 2\mu)\frac{(\mu + \alpha + \phi)}{\beta}[1 - R_0]I$$

jelas bahwa $\dot{W} \leq 0$ asalkan $R_0 \leq 1$.
Jadi terbukti bahwa $W(S, I, R)$ fungsi Liapunov.
Telah diketahui bahwa $W(S, I, R)$ merupakan fungsi Liapunov dan $\dot{W} \leq 0$ asalkan $R_0 \leq 1$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan yang memenuhi sifat $\dot{W}(T) = 0$. Ini terjadi jika dan hanya jika $T = T_1 = (S^0, 0, 0) \in \Gamma$. Berdasarkan Teorema 6 himpunan invariant terbesar dalam $H = \{T = (S, I, R) \epsilon\, \Gamma : \dot{W}(T) = 0\}$ adalah $M = \{T_1\}$ dengan T_1 merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit. Karena himpunan H_1 tidak memuat solusi lain maka setiap solusi pada Γ menuju T_1 untuk $t \to \infty$. Selanjutnya berdasarkan Prinsip Invariant Lasalle yaitu Akibat 7, titik ekuilibrium T_1 stabil asimtotik global pada Γ. □

Teorema 15
Titik ekuilibrium endemik T_2 dari model SIRS (4.1.1) stabil asimtotik global pada interior Γ jika $R_0 > 1$.
Bukti
Didefinisikan $L: \{(S, I, R) \in \Gamma: S, I, R > 0\} \to \mathbb{R}$, dengan fungsi

$$L = \frac{1}{2}[(S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)]^2 + \frac{(\alpha + 2\mu)}{\beta}\left(I - I^* - I^* ln\frac{I}{I^*}\right) + \frac{(\alpha + 2\mu)}{2\phi}(R - R^*)^2$$

Berdasarkan Definisi 5, fungsi L adalah fungsi Lyapunov karena memenuhi
1. Fungsi
$$L = \frac{1}{2}[(S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)]^2 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\left(I - I^* - I^* ln\frac{I}{I^*}\right) + \frac{(\alpha+2\mu)}{2\phi}(R - R^*)^2$$
terdiri dari fungsi kuadratik, fungsi linier dan fungsi logaritma, jelas bahwa fungsi tersebut adalah fungsi yang kontinu pada interior Γ. Kemudian turunan parsial pertama juga kontinu pada interior Γ .
2. Titik ekuilibrium T_2 minimum global dan tunggal.
Berdasarkan Definisi 9, jelas bahwa Γ himpunan konveks. Kemudian diperoleh turunan parsial kedua dari fungsi L adalah

$$\frac{\partial^2 L}{\partial S^2} = 1,\ \frac{\partial^2 L}{\partial I^2} = 1 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\left(\frac{I^*}{I^2}\right),\ \frac{\partial^2 L}{\partial R^2} = 1 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi},$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial S \partial I} = 1, \frac{\partial^2 L}{\partial S \partial R} = 1, \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial S} = 1, \frac{\partial^2 L}{\partial I \partial R} = 1, \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial S} = 1,\ \frac{\partial^2 L}{\partial R \partial I} = 1$$

merupakan fungsi yang kontinu pada Γ.
Berdasarkan Definisi 10, diperoleh matriks *Hessian* di titik ekuilibrium T_2 yaitu

$$H(T_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta I^*} & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi} \end{pmatrix}.$$

matriks *Hessian* $H(T_2)$ definit positif karena

$\frac{\partial^2 L}{\partial S^2} = 1 > 0$, $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial S^2}\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial I^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial S \partial I}\right)^2 = \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta I^*} > 0$ dan

$det\ \ H(T_2) = \frac{(\alpha+2\mu)^2}{\beta\phi I^*} > 0.$

Berdasarkan Teorema 11, fungsi L merupakan fungsi konveks tegas.

Selanjutnya jelas bahwa $\dot{L} = 0$ pada saat $(S, I, R) = (S^*, I^*, R^*) = T_2$. Berdasarkan Teorema 2.7.9 titik ekuilibrium T_2 merupakan titik minimum lokal. Kemudian berdasarkan Teorema 13, titik minimum lokal T_2 dari fungsi L sekaligus merupakan titik minimum global pada Γ dan tunggal

3. Turunan fungsi $L(S, I, R)$ terhadap t adalah

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= \frac{\partial L}{\partial S}\frac{dS}{dt} + \frac{\partial L}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial L}{\partial R}\frac{dR}{dt} \\
&= [(S-S^*) + (I-I^*) + (R-R^*)]\frac{d(S+I+R)}{dt} + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\left(\frac{dI}{dt} - \frac{I^*}{I}\frac{dI}{dt}\right) \\
&\qquad + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(R-R^*)\frac{dR}{dt} \\
&= [(S-S^*) + (I-I^*) + (R-R^*)](\Lambda - \mu(S+I+R) - \alpha I) \\
&\qquad + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\left(\frac{I-I^*}{I}\right)(\beta SI - (\mu+\alpha+\phi)I) \\
&\qquad + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(R-R^*)(\phi I - (\mu+\gamma)R)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.1.6) diperoleh

$\Lambda = \mu(S^* + I^* + R^*) + \alpha I^*$, $\beta S^* = (\mu + \alpha + \phi)$ dan $\phi I^* - (\mu+\gamma)R^* = 0$, dan kemudian disubstitusi ke $\dot{L}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= [(S-S^*) + (I-I^*) + (R-R^*)]\Big(-\mu\big((S-S^*) + (I-I^*) + (R-R^*)\big) \\
&\qquad - \alpha(I-I^*)\Big) + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\left(\frac{I-I^*}{I}\right)(\beta SI - \beta S^* I) \\
&\qquad + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(R-R^*)(\phi I - (\mu+\gamma)R) \\
&= [(S-S^*) + (I-I^*) + (R-R^*)]\Big(-\mu\big((S-S^*) + (R-R^*)\big) \quad - (\alpha \\
&\qquad + \mu)(I-I^*)\Big) + (\alpha+2\mu)(I-I^*)(S-S^*) \\
&\qquad + \frac{(\alpha+2\mu)}{\phi}(R-R^*)\big(\phi(I-I^*) - (\mu+\gamma)(R-R^*)\big) \\
&= [(S-S^*) + (I-I^*) + (R-R^*)]\Big(-\mu\big((S-S^*) + (R-R^*)\big) \quad - (\alpha \\
&\qquad + \mu)(I-I^*)\Big) + (\alpha+2\mu)(I-I^*)(S-S^*) \\
&\qquad + (\alpha+2\mu)(R-R^*)(I-I^*) - \frac{(\alpha+2\mu)(\mu+\gamma)}{\phi}(R-R^*)^2 \\
&= -\mu\big((S-S^*) + (R-R^*)\big)^2 - (\alpha+\mu)(I-I^*)^2 - \frac{(\alpha+2\mu)(\mu+\gamma)}{\phi}(R-R^*)^2,
\end{aligned}$$

Nilai $\dot{L} \leq 0$, dengan syarat $R_0 > 1$ (syarat eksistensi titik ekuilibrium endemik)

Jadi terbukti bahwa $L(S, I, R)$ fungsi Lyapunov.

Telah diketahui bahwa $L(S, I, R)$ merupakan fungsi Lyapunov dan $\dot{L} \leq 0$. Selanjutnya akan ditentukan himpunan yang memenuhi sifat $\dot{L}(T) = 0$. Ini terjadi jika dan hanya jika $S = S^*$, $I = I^*$ dan $R = R^*$ yaitu $T = T_2 = (S^*, I^*, R^*) \in \Gamma$. Berdasarkan Teorema 2.6.3 himpunan invariant terbesar dalam $H = \{T = (S, I, R) \epsilon \Gamma : \dot{W}(T) = 0\}$ adalah $M = \{T_2\}$ dengan T_2 merupakan titik ekuilibrium endemik. Karena himpunan H tidak memuat solusi lain maka setiap solusi pada interior Γ menuju T_2 untuk $t \to \infty$. Selanjutnya berdasarkan Prinsip Invariant Lasalle yaitu Akibat 2.6.4, titik ekuilibrium T_2 stabil asimtotik global pada interior Γ yaitu $\{(S, I, R) \in \Gamma : S, I, R > 0\}$. □

7. KESIMPULAN

Pada model SIRS, dengan mendefinisikan $W : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, fungsi Lyapunov yang digunakan adalah $W(S, I, R) = \frac{1}{2}[(S - S^0) + I + R]^2 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta} I + \frac{(\alpha+2\mu)}{2\phi} R^2$ dapat disimpulkan, titik ekuilibrium bebas penyakit T_1 stabil asimtotik global pada Γ jika $R_0 \le 1$, artinya dalam waktu yang cukup panjang populasi pada suatu daerah akan terbebas dari penyakit asalkan jumlah individu dalam populasi yang terinfeksi baru yang diproduksi dari satu individu terinfeksi pada saat semua individu rentan kurang dari atau sama dengan satu ($R_0 \le 1$). Selanjutnya, dengan mendefinisikan $L : \{(S, I, R) \in \Gamma : S, I, R > 0\} \to \mathbb{R}$, fungsi Lyapunov yang digunakan $L = \frac{1}{2}[(S - S^*) + (I - I^*) + (R - R^*)]^2 + \frac{(\alpha+2\mu)}{\beta}\left(I - I^* - I^* ln \frac{I}{I^*}\right) + \frac{(\alpha+2\mu)}{2\phi}(R - R^*)^2$, dapat disimpulkan, titik ekuilibrium endemik T_2 stabil asimtotik global pada interior Γ asalkan $R_0 > 1$, artinya dalam waktu yang cukup panjang populasi dalam suatu daerah akan terjadi wabah penyakit jika jumlah individu dalam populasi yang terinfeksi baru yang diproduksi dari satu individu terinfeksi pada saat semua individu rentan lebih dari satu ($R_0 > 1$).

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., and Shetty, C.M., 1993, Nonlinear Programming Theory and Algorithms, John Wiley & Sons. Inc, New York

[2] Becerra, M. Victor, 2008**.** *La Salle's Invariant Set Theory***,** http://www.personal.rdg.ac.uk/~shs99vmb/notes/anc/lecture3 .pdf

[3] Boyd, Stephen, 2008, *Basic Lyapunov Theory*, Stanford University, http://www.stanford.edu/class/ee363/lyap .pdf

[4] Brauer, F. and Chavez, C.C., 2001, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemology*, Springer, New York.

[5] Chong, K.P. and Stainslow, H. Z., 1996, *An introduction to optimization*, John Wiley & Sons. Inc, New York.

[6] Korobeinikov, A. and Maini, P, K., 2004, A Lyapunov Function and Global Properties For SIR and SEIR Epidemiological Models With Nonlinear Incidence, *Mathematical Bioscience and engineering* , Vol. 1 Number 1 pp. 57-60.

[7] Korobeinikov A., 2006, Lyapunov Function and Global Stability For SIR and SIRS Epidemiological Models With Nonlinear Tranmission. *Bulletin of Mathematical Biology* , 30 pp.615–626, DOI 10.1007/s11538-005-9037-9

[8] Leon's, C.V.D., 2009, Constructions of Lyapunov Functions for Classics SIS, SIR and SIRS Epidemic Model With Variable Population Size, *Mat-Red Foro*, Vol. 26, www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/Vol026.

[9] Leon, J. S., 1998, *Aljabar Linear Dan Aplikasinya* , Edisi kelima, Alih bahasa oleh Bondan, A., Erlangga, Jakarta.

[10] Luenberger, D, G., 1979, *Introduction to dynamical system theory, models, and applications*, John Wiley & Sons, Inc, Canada.

[11] Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

[12] Verhulst, F., 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-Verlag, Berlin.

[13] Wiggins, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,* Springer-Verlag, New York.