Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol. 5 No.2 Desember 2011: 31 - 39

SYARAT BATAS SERAP PADA GELOMBANG AKUSTIK DUA DIMENSI

Mohammad Mahfuzh Shiddiq

ABSTRACT

Acoustic wave equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions cause incident wave was perfectly reflected at edge. Thus, it is used absorbing boundary conditions that produce no reflection. In this paper, we would like find approximation of absorbing conditions that produce reflection coefficient as small as possible and smaller than those obtained from Dirichlet and Neumann boundary conditions.

Keywords *: Wave equation, Absorbing boundary condition, Reflection coefficient.*

1. PENDAHULUAN

Masalah persamaan gelombang biasanya diselesaikan dalam media tak hingga. Akan tetapi keterbatasan perhitungan komputasi dalam menghitung hampiran solusi persamaan beda hingga hanya dapat dilakukan dengan media berhingga sehingga dibutuhkan sebuah batas untuk memperoleh sebuah model berhingga. Oleh karena itu, dalam perhitungan solusi suatu persamaan diferensial parsial sering dibutuhkan pengenalan batas buatan untuk membatasi daerah perhitungan.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang masalah syarat batas pada persamaan gelombang akustik yang berbentuk

$$\frac{1}{c}u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

dengan domain hingga. Salah satu masalah pada perambatan gelombang akustik adalah adanya pemantulan yang terjadi pada batas. Hal ini tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya dikarenakan ketakhinggaan media. Pemantulan pada batas ini akan dikurangi atau bahkan dihilangkan pada model masalah perambatan gelombang akustik. Jadi syarat batas yang akan dicari untuk menggantikannya adalah syarat batas yang menunjukkan bahwa gelombang datang akan melewati atau diteruskan ketika sampai pada batas.

2. SYARAT BATAS SERAP GELOMBANG AKUSTIK

2.1. Gelombang Akustik Satu Dimensi

Sebelum melihat persamaan gelombang dua dimensi akan ditinjau dulu persamaan gelombang akustik satu dimensi yang diberikan dengan

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

untuk nilai $-L \le x \le L, t \ge 0$. Adapun syarat batas yang diberikan adalah syarat batas Dirichlet, yaitu

$$u(\pm L, t) = 0 \tag{2}$$

Ataupun juga syarat batas Neumann, yaitu

$$\frac{\partial u(\pm L,t)}{\partial x}=0 \tag{3}$$

Kedua syarat batas di atas menghasilkan suatu pantulan gelombang pada batas-batas domainnya. Hal ini dapat dilihat dengan mensubtitusikan solusi dari persamaan gelombang (1), yaitu

$$u=e^{i(\omega t-kx)}+R\,e^{i(\omega t+kx)} \tag{4}$$

dengan R adalah koefisien pantul dan $\omega=kc$ adalah frekuensi sudut, disubtitusikan pada syarat batas Dirichlet dan Neumann diatas menghasilkan $|R|=1$, yang menunjukkan bahwa amplitudo gelombang balikan yang bergerak ke kiri sama dengan amplitude gelombang datang, dengan kata lain terjadi gelombang pantul pada batas.

Pada kasus aplikasi nyata, kadang diperlukan untuk menghilangkan atau mengurangi gelombang pantulan pada batas. Jadi dicari syarat batas yang mengakibatkan nilai koefisien pantul R mendekati nol atau bahkan nol sehingga gelombang pantul pada batas tidak terjadi. Oleh karena itu, dikenalkan syarat batas sebagai berikut

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u(-L,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(-L,t)}{\partial x}=0 \tag{5}$$

dan

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u(L,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0 \tag{6}$$

Syarat batas (5) dan (6) di atas dinamakan syarat batas serap. Jika dilihat dari nilai koefisien pantul R, maka syarat batas serap (5) dan (6) menghasilkan $R=0$ yang menunjukkan kedua syarat batas tersebut menyebabkan gelombang datang pada batas diteruskan melalui batas atau diserap pada batas sehingga tidak terjadi gelombang pantul.

2.2. Gelombang Akustik Dua Dimensi

Pada kasus dua dimensi, persamaan gelombang akustik dinyatakan dengan

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{7}$$

dalam media yang dibatasi oleh $\hat{D}=\{(x,y,t)\,|\,-L\le x\le L, 0\le y\le M, 0\le t\le T\}$. Jika syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet

$$u(\pm L,y,t)=0, \qquad u(x,M,t)=0 \tag{8}$$

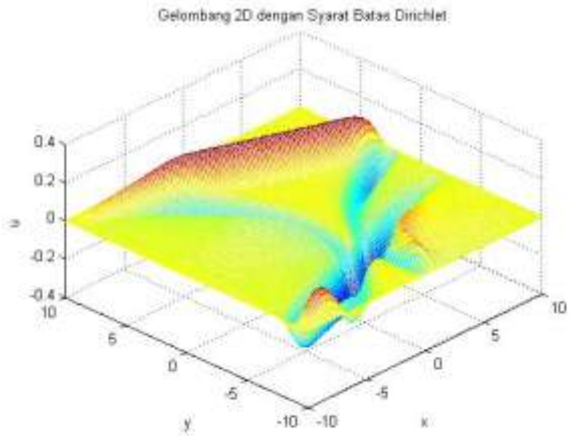
ataupun syarat batas Neumann

$$\frac{\partial u(\pm L,y,t)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,M,t)}{\partial y}=0 \tag{9}$$

maka akan menghasilkan gelombang pantul yang kuat pada kedua batas-batasnya. Misalkan solusi persamaan gelombang (7) yaitu

$$u=e^{i(\omega t-kx\cos\theta\pm ky\sin\theta)}+R\,e^{i(\omega t+kx\cos\theta\pm ky\sin\theta)} \tag{10}$$

disubtitusikan pada syarat batas (8) dan (9) menghasilkan $|R| = 1$, yang berarti terjadi pantulan di batas-batas.



Gambar 1. Gelombang Dua dimensi dengan syarat batas Diriclet

Oleh karena itu, dibutuhkan syarat batas yang tidak menghasilkan gelombang pantul pada batas-batas yang ditentukan. Salah satu cara adalah dengan mencari faktorisasi operasi diferensial pada persamaan (7). Salah satu faktorisasi tersebut adalah

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]\left[\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad (11)$$

Akan tetapi jika nilai θ pada solusi persamaan gelombang adalah nol maka

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Jadi dapat dikatakan bahwa jika nilai θ mendekati nol maka syarat batas (5) dan (6) dapat dipilih atau dipandang sebagai kasus satu dimensi.

Sedangkan untuk mencari nilai koefisien pantul pada faktorisasi ini, persamaan (10) disubtitusikan pada syarat batas (6) menghasilkan

$$R_1(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Nilai $R_1(\theta)$ pada setiap sudut datang dapat dilihat dalam table 1.

Tabel 1. Tabel Nilai Koefisien

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$R_1(\theta)$	0	0.0718	0.01716	0.3333	1
$R_2(\theta)$	0	0.0052	0.0294	0.0111	1
$R_3\left(\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	0	0.0073	0	0.0572	1
$R_3\left(\theta,\frac{1}{2}\right)$	0	0.0192	0.0294	0.0000	1
$R_3\left(\theta,\frac{1}{3}\right)$	0	0.0319	0.0616	0.0667	1

Berdasarkan nilai koefisien pantul $R_1(\theta)$ yang diperoleh, memotivasi untuk mencari penurunan syarat batas untuk masalah ini sehingga diperoleh nilai koefisien pantul lain yang rata-ratanya lebih rendah dengan sebelumnya pada setiap sudut datang.

Selanjutnya, ditinjau faktorisasi formal operator diferensial untuk persamaan gelombang dua dimensi,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left[\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}-K\right]\cdot\left[\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+K\right] \tag{12}$$

Dengan $K=\left(\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Faktorisasi (12) memberikan ide untuk syarat batas serap,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-K\right)u&=0, \qquad x=-L\\ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+K\right)u&=0, \qquad x=L\end{aligned} \tag{13}$$

Namun kedua syarat tersebut bergantung pada bilangan gelombang k, sehingga tidak dapat digunakan dalam penggunaan praktis. Bentuk lain dari kedua syarat batas (13) akan dicari sehingga dapat digunakan dalam penggunaan praktis.

Jika ditinjau kembali penulisan K secara formal dari operator diferensial sebagai berikut

$$\begin{aligned}K&=\left(\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}}\end{aligned}$$

Dan dimisalkan f adalah fungsi

$$f(k_y) = \sqrt{1 + \frac{k_y^2}{k_x^2}}$$

Maka persamaan (13) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x = -L \tag{14}$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x = L \tag{15}$$

Nilai koefisien pantul pada syarat batas (14) dan (15) dapat dicari dengan menggunakan rumusan

$$R_2(\theta) = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta}{\cos\theta + \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta}$$

Meskipun nilai koefisien pantul $R_2(\theta)$ yang dihasilkan lebih rendah daripada $R_1(\theta)$ (lihat tabel 1), tapi belum bisa dibuatkan skema beda hingga. Selanjutnya, akan dicari bentuk lain dari syarat batas (14) dan (15) yang mempunyai rata-rata lebih rendah nilai koefisien pantulnya. Diketahui bahwa syarat batas (15) ekuivalen dengan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{p}{1+p}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

dengan $p = c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$. Nilai koefisien pantul pada syarat batas (16) adalah

$$R_3(\theta, p) = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta - \left(\frac{p}{1+p}\right)\sin^2\theta}{\cos\theta + \cos^2\theta + \left(\frac{p}{1+p}\right)\sin^2\theta}$$

Diketahui pula bahwa pada persamaan gelombang orde dua standar, syarat kestabilan Von-Neumann adalah

$$p = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sehingga pada koefisien pantul $R_3(\theta, p)$, dapat dipakai nilai p sedemikian hingga syarat kestabilan tersebut dipenuhi. Beberapa nilai koefisien pantul $R_3(\theta, p)$ dapat dilihat pada tabel 1 di atas.

Syarat batas (16) akan lebih mudah dibuat dalam bentuk skema beda hingga eksplisit jika bentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ditransformasi. Persamaan gelombang dua dimensi memberikan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Sehingga persamaan (16) menjadi

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad x = L \tag{17}$$

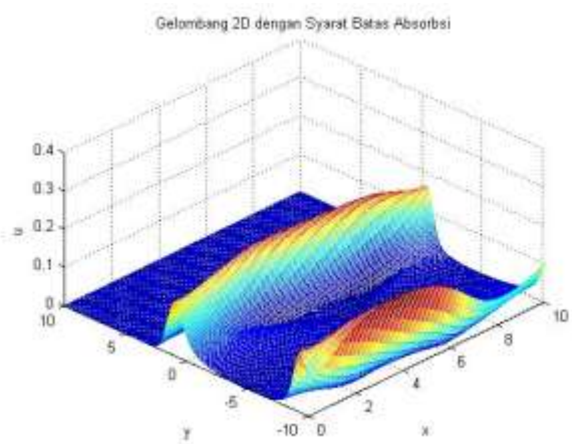
atau

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{p}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \qquad x = L \tag{18}$$

Sedangkan dengan cara yang serupa didapatkan syarat batas untuk batas kiri dan bawah, yaitu

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{p}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \qquad x = -L \tag{19}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{p}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0 \qquad y = M \tag{20}$$



Gambar 2. Gelombang Dua dimensi dengan syarat batas serap

2.3. Syarat Batas Serap (metode hampiran)

Misalkan persamaan gelombang akustik pada dua dimensi, seperti yang didefinisikan sebelumnya, berbentuk

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Dan misalkan salah satu solusi persamaan gelombang tersebut adalah gelombang yang merambat ke kanan yang diberikan dalam bentuk

$$u = e^{i(\omega t - kx\cos\theta \pm ky\sin\theta)}, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \tag{21}$$

Jika diberikan syarat batas yang mempertahankan u dengan bentuk

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\cos\theta\right)u = 0 \tag{22}$$

maka semua gelombang yang didefinisikan dalam (21) tidak mengahasilkan pantulan. Akan tetapi menurut Enquist [1] syarat batas sempurna (22) tidak lokal terhadap spasial dan waktu. Oleh karena itu, dibutuhkan hampiran lokal syarat batas serap untuk syarat batas serap sempurna (22).

Tinjau kembali simbol dari syarat batas (22) yaitu

$$\frac{\partial}{\partial x} + ik\cos\theta = \frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1-\sin^2\theta} \tag{23}$$

Dengan menggunakan hampiran deret Taylor untuk akar pangkat dua yaitu $\sqrt{1-x} = 1 + O(x^2)$ diperoleh,

$$\frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\partial}{\partial x} + ik$$

Dan mengingat bahwa $ik = \frac{1}{c} i\omega$ berkaitan dengan $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ maka didapatkan *hampiran pertama syarat batas serap*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right] u = 0 \tag{24}$$

Meskipun nilai koefisien pantul $\tilde{R}_1(\theta)$ menghasilkan koefisien pantul yang kecil, namun akan dicari hampiran syarat batas serap yang mempunyai koefisien pantul relatif lebih rendah dengan $\tilde{R}_1(\theta)$.

Langkah yang diambil selanjutnya adalah menggunakan hampiran (deret Taylor) untuk akar pangkat dua, yaitu $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$, maka dari (23) menunjukkan bahwa

$$\frac{\partial}{\partial x} + ik - \frac{1}{2} ik \sin^2\theta$$

Hasil terakhir yang didapatkan selanjutnya dikalikan dengan ik, diperoleh

$$ik\frac{\partial}{\partial x} - k^2 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta$$

Sehingga diperoleh *hampiran kedua syarat batas serap*

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u = 0 \tag{25}$$

Nilai koefisien pantul dari hampiran kedua syarat batas serap ini adalah

$$\tilde{R}_2(\theta) = \frac{\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta}{\cos\theta + 1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta}$$

Tabel 2. Nilai Koefisien Pantul $\tilde{R}$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tilde{R}_1(\theta)$	0	0.0718	0.01716	0.3333	1
$\tilde{R}_2(\theta)$	0	0.0052	0.0294	0.0111	1
$\tilde{R}_3(\theta)$	0	0.0004	0.0051	0.0370	1

Nilai koefisien $\tilde{R}_2(\theta)$ dapat dilihat pada Tabel 2. Jika dilihat nilai koefisien pantul ini, nilai rata-rata pada setiap sudut datang relative lebih rendah dari pada $\tilde{R}_1(\theta)$. Juga dapat dilihat bahwa $\tilde{R}_2(\theta)$ bernilai sama dengan $R_2(\theta)$.

Hampiran selanjutnya yang digunakan adalah *hampiran Padé* orde dua untuk akar pangkat yaitu $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{1-\frac{x}{2}} + O(|x|^3)$. Menggunakan persamaan tersebut, maka dari persamaan (23) didapatkan

$$4\frac{\partial}{\partial x} - \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial x} + 4ik - 3ik\sin^2\theta$$

Hasil terakhir di atas dikalikan dengan $-\frac{k^2}{4}$ sehingga diperoleh

$$-k^2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4}k^2\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial x} - ik^3 + \frac{3}{4}ik^3\sin^2\theta \tag{26}$$

Jadi diperoleh *hampiran ketiga syarat batas ketiga*

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{1}{c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{3}{4}\frac{1}{c}\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\right]u = 0 \tag{27}$$

dengan nilai koefisien pantul

$$\tilde{R}_3(\theta) = \frac{\cos\theta - \frac{1}{4}\cos\theta\sin^2\theta - 1 + \frac{3}{4}\sin^2\theta}{\cos\theta - \frac{1}{4}\cos\theta\sin^2\theta + 1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}$$

3. KESIMPULAN

Persamaan gelombang akustik akan menghasilkan pemantulan pada batas jika menggunakan syarat batas Dirichlet dan Neumann. Oleh karena itu, dibuat syarat batas serap pada masalah perambatan gelombang akustik yang menghilangkan gelombang pantul pada batas, yaitu sebagai berikut

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u(L,y,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(L,y,t)}{\partial x} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u(L,y,t)}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 u(L,y,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(L,y,t)}{\partial y^2} = 0 \tag{29}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{p}{1+p}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{30}$$

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u = 0 \tag{31}$$

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{1}{c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{3}{4}\frac{1}{c}\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\right]u = 0 \tag{32}$$

Syarat batas (32) mempuyai rata-rata koefisien pantul yang relatif paling kecil, tapi syarat batas serap (30) dengan nilai $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ menghasilkan syarat batas serap sempurna dengan koefisien pantul nol dengan sudut pantul 45^0.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Enquist, Bjorn and Majda, Andrew. 1977. *Absorbing Boundary Conditions for Numerical Simulation of Wave.* Journal of Mathematics of Computation Volume 31 Number 139.

[2]. Higdon, Robert L. 1986. *Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximations to The Multi-Dimensional Wave Equation*. Journal of Mathematics of Computation Volume 47 Number 176

[3]. Hoffman, Joe D. 1993. *Numerical Method for Engineers and Sciencetist.*McGraw-Hill, Inc. Singapore

[4]. Mathews, John and Fink Kurtis D. 1999. *Numerical Methods Using Matlab, Third Edition.* Prenctice-Hall,Inc. New York.

[5]. Reynolds, Albert C. 1987. *Boundary Conditions for Numerical Methods of Wave Propagation Problems.* Society Exploration of Geophysicist (SEG).

[6]. Sewel, Granville. 2005. *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Equations, Second Edition*. Willey-Interscience series of Texts. Monographs and Tracts. New Jersey

[7]. Strauss, Walter A. 1992. *Partial Differential Equation, Introduction*. John-Willey. Canada

[8]. Wono S. 2011. *Modul Kuliah: Persamaan Integral*. Bandung