Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol. 6 No.1 Juni 2012: 1 - 8

BIFURKASI DARI HASIL MODIFIKASI SISTEM PERSAMAAN LORENZ

Faisal
PS Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru

ABSTRAK

Sistem persamaan Lorenz merupakan keluarga dari sistem persamaan Chen dan sistem persamaan Lu. Sistem persamaan Lorenz, sistem persamaan Chen dan sistem persamaan Lu ketiganya mempunyai tiga parameter positif.

Perbedaan modifikasi sistem persamaan Lorenz dengan ketiga sistem persamaan yang lain (sistem persamaan Lorenz, sistem persamaan Chen, sistem persamaan Lu) masing-masing terletak pada persamaan kedua. Modifikasi sistem persamaan Lorenz mempunyai dua parameter dengan salah satu parameter boleh bernilai negatif.

Pada tulisan ini akan dianalisa ada tidaknya bifurkasi. Hasil dari tulisan ini menunjukkan system mempunyai bifurkasi Hopf subkritikal.

Kata kunci: *Sistem persamaan Lorenz, Bifurkasi, Bifurkasi Hopf*

1. PENDAHULUAN

Salah satu bentuk dari sistem tak liniear adalah sistem Lorenz. Sistem persamaan Lorenz secara umum didefinisikan sebagai berikut[1]:

$$\dot{x} = a(y - x)$$
$$\dot{y} = (c - z)x - y$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Dengan *a= 10; b =28* dan *c =8/3*

Sistem Chen didefinisikan sebagai berikut[2] :

$$\dot{x} = a(y - x)$$
$$\dot{y} = (c - a)x - xz + cy$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

dengan *a= 35; b = 3* dan *c = 28*. Sistem Lu didefenisikan sebagai berikut[4] :

$$\dot{x} = a(y - x)$$
$$\dot{y} = -xz + cy$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

dengan *a = 36; b = 3* dan *c = 20*. Pada tulisan ini akan dibahas sistem didefinisikan sebagai[4]:

$$\dot{x} = a(y - x)$$
$$\dot{y} = 4ax - axz \qquad (1)$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

dengan a dan b adalah parameter, $a \neq 0$. Perbedaan dari ketiga sistem diatas yaitu pada bagian persamaan $\dot{y} = 4ax - axz$, sistem tersebut hanya memiliki dua parameter.

2. TINJAUN PUSTAKA

2.1 Kestabilan

Untuk menentukan kestabilan titik setimbang *(0,0,0)* dari sistem tak linear digunakan koefisien Lyapunov pertama ($l_1(0)$), terlebih dahulu menentukan dinamika *center manifold*

Jika didefinisikan[2,3] berikut :

$$\dot{w} = iw_0 w + \frac{1}{2} g_{20} w^2 + \frac{1}{2} g_{02} u^2 + g_{11} uw + \frac{1}{2} g_{21} uw^2 + O(|w|^3)$$

maka koefisien Lyapunov pertama ($l_1(0)$) adalah

$$l_1(0) = \frac{\mathrm{Re}(C(0))}{w_0}$$

dengan $C(0) = \frac{i}{2\sqrt{3}\,a}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2}$.

(2)

Kriteria kestabilan koefisien Lyapunov pertama ($l_1(0)$)[6]

a. jika $l_1(0) > 0$, maka kestabilan titik setimbang stabil dan *limit cicle* tidak stabil

b. jika $l_1(0) < 0$, maka kestabilan titik setimbang tidak stabil

2.2 Center Manifold

Pandang suatu medan vektor

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x,y) \\ \dot{y} &= By + g(x,y) \quad , \quad (x,y) \in R^c x R^s \end{aligned} \tag{3}$$

dengan
$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \qquad Df(0,0) = 0 \\ g(0,0) &= 0, \qquad Dg(0,0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Pada persamaaan (3) matriks A_{cxc} menyatakan nilai eigen yang bagian realnya nol, B_{sxs} menyatakan nilai eigen yang bagian realnya negatif dan $f, g \in C^r$ $(r \geq 2)$.

Definisi[5]

Suatu manifold invariant disebut center manifold jika persamaan (2) dapat direpsentasikan sebagai berikut :

$$W^c(0) = \{(x,y) \in R^c x R^s \mid y = h(x), |x| < \delta,\ h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

untuk δ *cukup kecil. Kegunaan dari Center manifold adalah untuk mereduksi dimensi dari sistem dinamik.*

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan di dalam penelitian ini adalah studi literatur.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisa Kestabilan Lokal

Untuk menentukan kestabilan dari modifikasi persamaan (1) dengan bentuk

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y-x)\\ \dot{y} &= 4ax-axz\\ \dot{z} &= xy-bz\end{aligned} \tag{5}$$

terlebih dahulu ditentukan titik kesetimbangan dengan mengambil $\dot{x}=0,\ \dot{y}=0$ dan $\dot{z}=0$, sehingga diperoleh nilai masing-masing $y=x,\quad z=4,\ \ y_1=2\sqrt{b}$. dan $y_2=-2\sqrt{b}$. Jadi persamaan (1) mempunyai tiga titik setimbang yaitu $O(0,0,0),\ S_+(2\sqrt{b},2\sqrt{b},4)$ dan $S_-(-2\sqrt{b},-2\sqrt{b},4)$

Teorema 1.
Titik setimbang O (0,0,0) untuk $a \neq 0$ *dari persamaan (1) tidak stabil.*

Selanjutnya akan ditinjau kestabilan titik setimbang $S_+(2\sqrt{b},2\sqrt{b},4)$ dan $S_-(-2\sqrt{b},-2\sqrt{b},4)$. Dengan melakukan tranformasi $(x,y,z)\rightarrow(-x,-y,z)$. Hasil Transformasi persamaan (1) invarian. Oleh karena itu cukup ditentukan salah satu titik setimbang $S_+(2\sqrt{b},2\sqrt{b},4)$ atau $S_-(-2\sqrt{b},-2\sqrt{b},4)$. Dipilih titik setimbang $S_+(2\sqrt{b},2\sqrt{b},4)$. Untuk memudahkan menentukan kestabilan, mula-mula titik setimbang $S_+(2\sqrt{b},2\sqrt{b},4)$ ditranformasikan(ditranslasikan) menjadi titik setimbang *(0,0,0)*, sehingga persamaan (1) sekarang menjadi

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a(Y-X)\\ \dot{Y} &= -2a\sqrt{b}\,Z-aXZ\\ \dot{Z} &= 2\sqrt{b}\,(X+Y)-bZ+XY\end{aligned} \tag{6}$$

Persamaan (6) mempunyai titik setimbang *(0,0,0)* dan $(-2\sqrt{b},-2\sqrt{b},-4)$, dengan titik *(0,0,0)* adalah titik setimbang $S_+(2\sqrt{b},2\sqrt{b},4)$ yang sudah ditranslasikan.
Dari persamaan (6) diperoleh persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^3+(a+b)\lambda^2+5ab\lambda+8a^2b=0 \tag{7}$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, (7) mempunyai akar-akar dengan bagian realnya negatif semua jika dipenuhi syarat

$$\begin{aligned}&a+b>0\\ &b>0\\ &a(5b-3a)>0\end{aligned} \tag{8}$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh teorema berikut

Teorema 2.

Persamaan (4.4) mempunyai sebuah akar real dan sepasang akar-akar imajiner murni jika b >0 dan $b = \frac{3}{5}a$.

Teorema 3.

Jika b > 0 dan $b = \frac{3}{5}a$, *titik setimbang* $S_+(2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}, 4)$ *stabil netral.*

Jika nilai $b = \frac{3}{5}a$ disubtitusikan ke persamaan (6) akan diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a(Y - X) \\ \dot{Y} &= -aXZ - 2a\sqrt{\frac{3}{5}a}\; Z \\ \dot{Z} &= -\frac{3}{5}aZ + XY + 2\sqrt{\frac{3}{5}a}\;(X + Y) \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan mengunakan matriks Jacobian dari persamaan (9) di sekitar titik setimbang (0,0,0), diperoleh akar-akar karakteristik berikut

$$\lambda_1 = -\frac{8}{5}a, \quad \lambda_2 = +ai\sqrt{3} \text{ dan } \lambda_3 = -ai\sqrt{3} \tag{10}$$

Berdasarkan **Teorema 2** dan **Teorema 3** titik setimbang $S_+(2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}, 4)$ mempunyai sepasang nilai eigen yang bagian realnya nol sehingga persamaan (1) mempunyai titik setimbang dengan jenis *center*. Karena itu eksistensi orbit periodik dari persamaan (1) perlu dianalisa lebih lanjut.

4.2 Center manifold

Langkah awal untuk mendapatkan *center manifold* adalah menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem (9)

$$(A - \lambda I)\vec{V} = 0 \text{ dengan } \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a-\lambda & a & 0 \\ 0 & -\lambda & -2a\sqrt{\frac{3}{5}a} \\ 2a\sqrt{\frac{3}{5}a} & 2a\sqrt{\frac{3}{5}a} & -\frac{3}{5}a-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Subtitusikan persamaan (9) ke persamaan (11) untuk memperoleh vektor eigen.

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{25}{12}\sqrt{\frac{3}{5}a} \\ \frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{5}a} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{5}a} + i\sqrt{\frac{1}{5}a}\right) \\ 2i\sqrt{\frac{1}{5}a} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena nilai λ_2 merupakan konjugate dari nilai λ_3 maka diperoleh vektor eigen $\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{5}a} - i\sqrt{\frac{1}{5}a}\right) \\ -2i\sqrt{\frac{1}{5}a} \\ 1 \end{pmatrix}$

Dengan memisahkan bagian real dan imajiner dari masing-masing vektor eigen $\vec{V}_2$ dan $\vec{V}_3$ diperoleh vektor eigen vektor eigen $\vec{W} = \frac{\vec{V}_2 + \vec{V}_3}{2}$ dan $\vec{W}' = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_3}{2}$,

dengan $\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan $\vec{W}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}a} \\ 2\sqrt{\frac{1}{5}a} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Selanjutnya dengan menggunakan vektor eigen - vektor eigen $\vec{W}, \vec{W}'$ dan $\vec{V}_1$, persamaan (9) ditranformasikan dengan persamaan tranformasinya

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad (12)$$

kemudian masing-masing peubah X, Y dan Z diturunkan terhadap t akan diperoleh bentuk

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= aY_1\sqrt{3} + \frac{25}{139}aX_1Y_1\sqrt{3} + \frac{193}{1112}aX_1Z_1 - \frac{1907}{3336}aY_1Z_1\sqrt{3} + \frac{6}{139}aX_1^{\,2} \\
&\quad + \frac{23}{139}aY_1^2 - \frac{3275}{2224}aZ_1^{\,2} \\
\dot{Y}_1 &= -aX_1\sqrt{3} - \frac{40}{139}aX_1Y_1 + \frac{2221}{3336}aX_1Z_1\sqrt{3} + \frac{7}{1112}aY_1Z_1 - \frac{31}{139}aX_1^{\,2}\sqrt{3} \\
&\quad - \frac{3}{139}aY_1^2\sqrt{3} + \frac{7325}{6672}aZ_1^{\,2}\sqrt{3} \\
\dot{Z}_1 &= -\frac{8}{5}aZ_1 + \frac{14}{695}aX_1Y_1\sqrt{3} + \frac{28}{139}aX_1Z_1 - \frac{19}{139}aY_1Z_1\sqrt{3} - \frac{6}{139}aX_1^{\,2} \\
&\quad + \frac{24}{695}aY_1^2 - \frac{25}{278}aZ_1^{\,2}
\end{aligned} \tag{13}$$

Dari persamaan (13) di sekitar titik setimbang (0,0,0) diperoleh nilai eigen

$\lambda_1 = ai\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -ai\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = -\frac{8}{5}a$.

Oleh karena terdapat sepasang nilai eigen yang bagian realnya nol (imajiner murni), maka menurut konsep *invarian manifold* koordinat Z_1 dipandang sebagai fungsi X_1 dan Y_1, yang dituliskan $Z_1 = h(X_1, Y_1)$. Hal ini berakibat persamaan (13) akan tereduksi menjadi dua dimensi yang selanjutnya disebut sebagai *center manifold*. *Center manifold* lokal dari persamaan (13) disekitar titik setimbang $O_1(0,0,0)$ ditulis $W_{loc}^c\ (O_1) = \{(X_1, Y_1, Z_1) \in R^3 \mid Z_1 = h(X_1, Y_1),\ |X_1| + |Y_1| << 1\}$ dengan

$h(0,0) = 0,\ \frac{\partial h}{\partial X_1}(0,0) = 0\ ,\ \frac{\partial h}{\partial Y_1}(0,0) = 0$.

Sekarang akan diturunkan *center manifold* dari persamaan (13). Subtitusikan $Z_1 = h(X_1, Y_1)$ ke persamaan (13) yang teruduksi menjadi dua dimensi akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= aY_1\sqrt{3} + \frac{25}{139}aX_1Y_1\sqrt{3} + \frac{193}{1112}aX_1h - \frac{1907}{3336}aY_1h\sqrt{3} + \frac{6}{139}aX_1^{\,2} \\
&\quad + \frac{23}{139}aY_1^{\,2} - \frac{3275}{2224}ah^2 \\
\dot{Y}_1 &= -aX_1\sqrt{3} - \frac{40}{139}aX_1Y_1 + \frac{2221}{3336}aX_1h\sqrt{3} + \frac{7}{1112}aY_1h - \frac{31}{139}aX_1^{\,2}\sqrt{3} \\
&\quad - \frac{3}{139}aY_1^{\,2}\sqrt{3} + \frac{7325}{6672}ah^2\sqrt{3}
\end{aligned} \tag{14}$$

Berdasarkan pengertian *center manifold* diasumsi bahwa $Z_1 = h(X_1, Y_1) = a_{11}X_1^{\,2} + a_{12}X_1Y_1 + a_{22}Y_1^{\,2} + \ldots..$

Misalkan $X_1 = w + u$ dan $Y_1 = i(w - u)$ (15)

dengan menurunkan terhadap *t* diperoleh $\dot{X}_1 = \dot{w} + \dot{u}$, $\dot{Y}_1 = i(\dot{w} - \dot{u})$. Jika dituliskan dalam variabel *u* dan *w* diperoleh

$$\dot{w} = \frac{1}{2}\dot{X}_1 - \frac{1}{2}i\dot{Y}_1, \quad (16) \quad \text{dan} \quad \dot{u} = \frac{1}{2}\dot{X}_1 + \frac{1}{2}i\dot{Y}_1 \quad (17)$$

Subtitusikan persamaan (14) dan persamaan (15) ke persamaan (16) dan persamaan (17) diperoleh

$$\dot{w} = iaw\sqrt{3} + \frac{93}{1112}ahu + \frac{25}{278}ahw + \frac{29}{139}auw - \frac{3275}{4448}ah^2 + \frac{23}{278}au^2 - \frac{57}{278}aw^2 - \frac{314}{6625}iahu\sqrt{3} - \frac{86}{139}iahw\sqrt{3} + \frac{34}{139}iawu\sqrt{3} - \frac{7325}{13344}iah^2\sqrt{3} + \frac{3}{278}iau^2\sqrt{3} + \frac{53}{278}iaw^2\sqrt{3} \quad (18)$$

$$\dot{u} = -iau\sqrt{3} + \frac{25}{278}ahu + \frac{93}{1112}ahw + \frac{29}{139}auw - \frac{3275}{4448}ah^2 - \frac{57}{278}au^2 + \frac{23}{278}aw^2 + \frac{86}{139}iahu\sqrt{3} + \frac{314}{6672}iahw\sqrt{3} - \frac{34}{139}iawu\sqrt{3} + \frac{7325}{13344}iah^2\sqrt{3} - \frac{53}{278}iau^2\sqrt{3} - \frac{3}{278}iaw^2\sqrt{3} \quad (19)$$

Untuk menentukan koefisien persamaan *center manifold* dapat diasumsikan

$$Z_1 = a_{11}X_1^2 + a_{12}X_1Y_1 + a_{22}Y_1^2 + O(|w|^3) \quad (20)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (15) ke persamaan (20) akan diperoleh

$$Z_1 = N_{11}w^2 + N_{12}wu + N_{22}u^2 + O(|w|^3) \quad (21)$$

dengan N_{11}, N_{12} dan N_{22} adalah koefisen persamaan *center manifold.*
Dengan menurunkan persamaan (21) ke peubah *w* dan *u* akan diperoleh

$$\dot{Z}_1 = 2N_{11}w\dot{w} + N_{12}(\dot{w}u + w\dot{u}) + 2N_{22}\dot{u}u \quad (22)$$

Subtitusikan persamaan (18) dan (19) ke persamaan (21) akan diperoleh

$$\dot{Z}_1 = 2iaw^2N_{11}\sqrt{3} - 2iau^2N_{22}\sqrt{3} + O(|w|^3) \quad (23)$$

Subtitusikan persamaan (21) dan persamaan (15) ke persamaan (13) pada bagian persamaan ketiga akan diperoleh koefisien persamaan *center manifold*

$$N_{11} = -\frac{3}{12649} + \frac{163}{12649}i\sqrt{3}, \quad N_{12} = -\frac{3}{278}, \quad N_{22} = -\frac{163}{12649}i\sqrt{3} - \frac{3}{12649} \quad (24)$$

Untuk memperoleh persamaan *center manifold* subtitusikan persamaan (24), ke persamaan (21) sehinnga diperoleh

$$h = w^2\left(\frac{163}{12649}i\sqrt{3} - \frac{3}{12649}\right) - \frac{3}{278}uw - u^2\left(\frac{163}{12649}i\sqrt{3} + \frac{3}{12649}\right) \quad (25)$$

Sedang dinamika dari *center manifold* dapat diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (25) ke persamaan (18) diperoleh

$$\dot{w} = iaw\sqrt{3} + (\frac{53}{278}i\sqrt{3} - \frac{57}{278})aw^2 + (\frac{23}{278} + \frac{3}{278}i\sqrt{3})au^2 + (\frac{29}{139} + \frac{34}{139}i\sqrt{3})auw$$
$$+ (\frac{4}{10.000} + \frac{9}{1000}i\sqrt{3})auw^2 + O(|w|^3)$$

Misalkan dengan mengambil koefisien dari w^2, uw, u^2 dan w^2u yang merupakan koefisien dinamika *center manifold* yaitu

$$g_{20} = 2(\frac{53}{278}i\sqrt{3} - \frac{57}{278})a, \quad g_{02} = 2(\frac{23}{278} + \frac{3}{278}i\sqrt{3})a$$
$$g_{11} = (\frac{29}{139} + \frac{34}{139}i\sqrt{3})a, \quad g_{21} = 2(\frac{4}{10.000} + \frac{9}{1000}i\sqrt{3})a \tag{26}$$

Persamaan (26) akan digunakan untuk menetukan kestabilan titik setimbang $S_+(2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}, 4)$ dengan menggunakan koefisien Lyapunov pertama ($l_1(0)$), persamaan (26) ke persamaan (2) akan diperoleh $l_1(0) = \frac{\mathrm{Re}(C(0))}{w_0}$ = $\frac{0{,}11403a}{\sqrt{3}a} > 0$. Karena $l_1(0) > 0$, mengakibatkan titik setimbang *O(0,0,0)* dari persamaan (6) yang merupakan titik setimbang $S_+(2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}, 4)$ yang sudah ditransformasikan stabil, juga titik setimbang $S_+(2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}, 4)$ dari persamaan (1) stabil dengan *limit cicle* tidak stabil.

5. KESIMPULAN

Dengan menggunakan koefisien dinamika *center manifold* dapat ditentukan nilai koefisien Lyapunov pertama $l_1(0) = \frac{\mathrm{Re}(C(0))}{w_0}$ > 0, yang mengakibatkan titik setimbang $S_+(2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}, 4)$ hasil tranformasi dari modifikasi sistem persamaan Lorenz stabil dengan *limit cicle* tidak stabil

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Lu, J.(2001), A New Chaotic Attractor Coined. *International Journal of Bifurcation and chaos*,vol. 12, No. 3 (2002) 659-661

[2] Lu, J.(2001), Local bifucations of The Chen system. *International Journal of Bifurcation and chaos*,vol. 12, No. 10 (2002) 2257-22702

[3] Mello, L.F. dan Braga, D.C.(2006), Stability and Hopf Bifurcation in the Water Governor System, Vol .1

[4] Tigan,G.(2005), Bifurcation and Stability in A System Derived from the Lorenz system. *Geometry Balkan Press*. **3**. 265-272

[5] Wiggins,S.(1990), *Introduction to Applied Non Linear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. Springer – Verlag. New York

[6] Yin, J dan Tian, L.(2006), *Hopf Bifurcation Analysis of the Energy Resource Chaotic System*, Vol. 1, No.1 hal. 49-53