FORMULA BINET DAN JUMLAH *n* SUKU PERTAMA PADA GENERALISASI BILANGAN FIBONACCI DENGAN METODE MATRIKS

Purnamayanti[1]
Thresye[2]
Na'imah Hijriati[3]
[1,] Alumni Mahasiswa PS Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat
[2,3] PS Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru

ABSTRAK

Bilangan Fibonacci didefinisikan sebagai barisan bilangan yang suku-sukunya merupakan penjumlahan 2 suku sebelumnya. Binet pada tahun 1875 mengemukakan suatu formula F_n yang mampu menghitung suku ke-*n* bilangan tersebut lebih cepat tanpa harus menghitung ulang sebanyak *n* kali, yang kemudian dikenal dengan formula atau rumus Binet. Tujuan dari penelitian ini adalah mempelajari terbentuknya formula Binet, membentuk generalisasi dari formula Binet pada bilangan Fibonacci berderajat-*p*, mencari jumlah *n* suku pertama pada bilangan Fibonacci berderajat-*p* dengan pendekatan aljabar linear khususnya penggunaan matriks.

Kata kunci: matriks Fibonacci, formula Binet, diagonalisasi, matriks Vandermonde.

1. PENDAHULUAN

Bilangan Fibonacci dapat ditunjukkan sebagai barisan bilangan:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

dengan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, …, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, (1.1)

untuk $n \geq 0$. Berikut diberikan formula Binet untuk menghitung suku ke-*n* dari bilangan Fibonacci tersebut:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1{}^n - \lambda_2{}^n), \tag{1.2}$$

dengan $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1.618...$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -0.618...$.

Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk mempelajari bagaimana terbentuknya formula Binet dengan pendekatan aljabar linier, khususnya menggunakan metode matriks. Selanjutnya, akan dibahas pula bagaimana terbentuknya generalisasi dari bilangan Fibonacci yang disebut bilangan Fibonacci berderajat-*p* dan bagaimana mencari jumlah *n* suku pertamanya. Berikut diberikan definisi dari Generalisasi tersebut:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1), \tag{1.3}$$

untuk *p* = 0, 1, 2, 3, … dan $n > p+1$

dengan kondisi $F_p(1) = F_p(2) = \cdots = F_p(p) = F_p(p+1) = 1$.

2. TINJAUN PUSTAKA

2.1. Matriks Vandermonde

Matriks Vandermonde dikenalkan oleh matematikawan Prancis bernama Alexandre-Théophile Vandermonde pada tahun 1700. Ia merupakan salah satu orang yang pertama menulis tentang sifat dasar dari determinan.

Dimisalkan V_d merupakan matriks Vandermonde $m \times n$ yang ditunjukkan sebagai berikut

$$V_d = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1}^{n-1} & \cdots & x_{m-1}^2 & x_{m-1} & 1 \\ x_m^{n-1} & \cdots & x_m^2 & x_m & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

beberapa penulis kadang-kadang mendefinisikan matriks Vandermonde sebagai transpos dari persamaan (2.1). Matriks ini sering digunakan untuk membuktikan beberapa pembuktian yang berkaitan dengan determinan matriks [5].

2.2. Bilangan Fibonacci

Bilangan Fibonacci berawal dari sebuah kasus yang dikemukakan oleh seorang matematikawan Italia, Fibonacci, dalam bukunya yang berjudul *Liber Abaci*. Kasus itu dijelaskan sebagai berikut: sepasang kelinci muda (jantan dan betina) ditempatkan di suatu pulau. Diasumsikan bahwa kelinci tidak akan melahirkan sebelum berumur 2 bulan. Kemudian, setelah berumur 2 bulan, setiap pasang kelinci akan melahirkan sepasang kelinci setiap 1 bulan. Pertanyaannya, berapa banyak pasang kelinci yang ada di sana setelah *n* bulan, jika diasumsikan bahwa kelinci tidak akan pernah mati.

Definisi 2.2.1. [3]

Bilangan Fibonacci adalah bilangan yang dapat ditunjukkan oleh barisan:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Didefinisikan sebagai barisan bilangan yang suku-sukunya merupakan penjumlahan 2 suku sebelumnya. Dengan F_n *menyatakan suku ke-n dari bilangan Fibonacci tersebut.*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \textit{untuk } n \geq 0, \textit{ dengan: } F_0 = 0 \quad \textit{dan } F_1 = 1.$$

2.3. Jumlah *n* Suku Pertama Bilangan Fibonacci

Pada suatu barisan, terdapat istilah deret yaitu untuk mencari jumlah *n* suku pertama. Berikut diberikan tabel perbandingan antara barisan Fibonacci dan Deret Fibonacci.

Tabel 1. F_n (Barisan Fibonacci) pada 10 suku pertama.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabel 2. S_n(Deret Fibonacci) pada 10 suku pertama.

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
0	1	2	4	7	12	20	33	54	88	144

Jumlah n suku pertama bilangan Fibonacci dapat ditunjukkan dengan identitas berikut: $S_n = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{n=0}^{n} F_n$.[5]

2.4. Matriks Fibonacci

Berikut diberikan definisi dari matriks Fibonacci dan pangkat n dari matriks Fibonacci tersebut.

Definisi 2.4.1. [6]

Matriks Q Fibonacci didefinisikan sebagai:

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dengan F_n *merupakan bilangan Fibonacci. Maka, pangkat n dari matriks Q Fibonacci,* $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

2.5. Generalisasi Bilangan Fibonacci

Barisan bilangan Fibonacci dapat digeneralisasi menjadi suatu pola bilangan baru, yang selanjutnya disebut bilangan Fibonacci berderajat-*p*. Berikut diberikan definisi dari generalisasi bilangan Fibonacci tersebut.

Definisi 2.5.1. [5]

Generalisasi bilangan Fibonacci yang kemudian disebut dengan bilangan Fibonacci berderajat p didefinisikan sebagai:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1), \quad \textit{untuk } n > p+1,$$

dengan kondisi $F_p(1) = F_p(2) = \cdots = F_p(p) = F_p(p+1) = 1.$

Jika dimisalkan $p = 1$, maka barisan bilangan fibnacci berderajat-*p* ini merupakan barisan Fibonacci yang dikenal sebelumnya. Berikut diberikan tabel mengenai barisan dari generalisasi bilangan Fibonacci.

Tabel 3. Barisan bilangan Fibonacci berderajat $0 \le p \le 4$ dan $n \le 13$.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$F_0(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$F_1(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$F_2(n)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
$F_3(n)$	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	28
$F_4(n)$	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	8	11	15

2.6. Generalisasi Matriks Fibonacci

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan sebelumnya mengenai matriks Fibonacci, maka matriks tersebut dapat digeneralisasi berdasarkan definisi yang ada. Berikut diberikan definisi dari generalisasi matriks Fibonacci.

Definisi 2.6.1. [6]

Generalisasi matriks dari generalisasi bilangan Fibonacci berderajat-p (p=0,1,2,3,...) didefinisikan sebagai matriks Q_p berorde (p+1)×(p+1) sebagai:

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dan matriks Q_p pangkat n didefinisikan sebagai $Q_p^n = [q_{ij}]$ dan $q_{ij} = F_p(n+j-i-p)$ untuk $j \geq 2$ dan $q_{i,1} = F_p(n+2-i)$ untuk $j=1$,

$$Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \cdots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \cdots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix}.$$

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian bersifat studi literatur, yaitu mengumpulkan, mempelajari dan memahami berbagai refrensi yang berkaitan dengan aljabar linier matriks, matriks Fibonacci, formula Binet, dan generalisasi pada bilangan Fibonacci, dilanjutkan dengan membuktikan beberapa teorema yang diperlukan dan menyelesaikan contoh soal yang terkait.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Proses Terbentuknya Formula Binet pada Bilangan Fibonacci

Berdasarkan definisi bilangan fibonacci, dapat dibentuk sistem persamaan linier dengan 2 persamaan untuk $n \geq 0$, dan mengubahnya ke persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^n \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^{n} - \lambda_2^{n} \end{bmatrix},$$

$$\Leftrightarrow F_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n),$$

dengan $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ merupakan nilai eigen dari $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Karena $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ maka $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$, formula inilah disebut dengan formula Binet.

4.2 Generalisasi Formula Binet pada Bilangan Fibonacci berderajat-*p*

Generalisasi matriks dari generalisasi bilangan Fibonacci berderajat-*p* $(p = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ didefinisikan sebagai matriks Q_p berorde $(p+1)\times(p+1)$ sebagai:

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dan matriks Q_p pangkat n didefinisikan sebagai $Q_p^n = [q_{ij}]$ dan $q_{ij} = F_p(n + j - i - p)$ untuk $j \geq 2$ dan $q_{i,1} = F_p(n+2-i)$ untuk $j = 1$,

$$Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \cdots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \cdots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix}.$$

Lemma 4.2.1.

Persamaan karakteristik dari bilangan Fibonacci berderajat-p $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ *tidak memiliki akar kembar untuk p merupakan bilangan asli* $(p > 0)$.

Misal $f(\lambda)$ adalah karakteristik polinomial dari generalisasi matriks Fibonacci Q_p, maka $f(\lambda) = \lambda^{p+1} - \lambda^p - 1$ dan persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^{p+1} - \lambda^p - 1 = 0$. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ merupakan nilai eigen dari matriks Q_p, dari Lemma 3.2.1 dapat diketahui bahwa $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ bukan merupakan akar kembar atau dapat dikatakan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ berbeda, sehingga Q_p dapat didiagonalisasi.

Dimisalkan V_d merupakan matriks Vandermonde berorde $(p+1)\times(p+1)$ yang ditunjukkan sebagai berikut

$$V_d = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & \lambda_1^{p-1} & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^p & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{p+1}^p & \lambda_{p+1}^{p-1} & \cdots & \lambda_{p+1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diberikan pula

$$d_k^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+p+1-i} \\ \lambda_2^{n+p+1-i} \\ \vdots \\ \lambda_{p+1}^{n+p+1-i} \end{bmatrix},$$

dan $V_j^{(i)}$ merupakan matriks yang diperoleh dari matriks V_d dengan mengganti kolom ke-j dengan matriks d_k^i.

Teorema 4.2.2.

Jika $F_p(n)$ merupakan suku ke-n dari bilangan Fibonacci berderajat p, maka $q_{ij} = \dfrac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V_d)}$, dimana $Q_p^n = [q_{ij}]$ dan $q_{ij} = F_p(n+j-i-p)$ untuk $j \geq 2$ dan $q_{i,1} = F_p(n+2-i)$ untuk $j=1$.

Bukti:

Karena Q_p dapat didiagonalisasi dan diasumsikan $V_d{}^T$ merupakan matriks invertibel, sehingga $(V_d{}^T)^{-1} Q_p V_d{}^T = D$, dengan D merupakan matriks diagonal yang memuat nilai-nilai eigen Q_p. Karena terbukti $Q_p V_d{}^T = V_d{}^T D$, sehingga benar bahwa terdapat matriks invertibel $V_d{}^T$ sehingga, $(V_d{}^T)^{-1} Q_p V_d{}^T = D$, dan berakibat $Q_p{}^n V_d{}^T = V_d{}^T D^n$. Dari hasil perhitungan $Q_p^n V_d{}^T = V_d{}^T D^n$, diperoleh SPL berikut untuk mencari nilai q_{ij}:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^p q_{i1} + \lambda_1^{p-1} q_{i2} + \cdots + q_{i,p+1} = \lambda_1^{p+n+1-i} \\ &\lambda_2^p q_{i1} + \lambda_2^{p-1} q_{i2} + \cdots + q_{i,p+1} = \lambda_2^{p+n+1-i} \\ &\vdots \\ &\lambda_{p+1}^p q_{i1} + \lambda_{p+1}^{p-1} q_{i2} + \cdots + q_{i,p+1} = \lambda_{p+1}^{p+n+1-i} \end{aligned}$$

Jadi, dengan menggunakan aturan Cramer, diperoleh nilai q_{ij} sebagai berikut:

$$q_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V_d)} \ ,$$

untuk setiap $j = 1,2,\dots, p+1$. ■

Akibat langsung dari teorema tersebut, didapatkan suatu kesimpulan, Jika $F_p(n)$ merupakan suku ke-*n* dari bilangan Fibonacci berderajat *p*, maka:

$$F_p(n) = \frac{\det(V_1^{(2)})}{\det(V_d)} = \frac{\det(V_{p+1}^{(1)})}{\det(V_d)},$$

dengan $i = 2, j = 1$ atau $i = 1, j = p+1$. Persamaan inilah yang disebut generalisasi dari formula Binet pada bilangan Fibonacci berderajat-*p*.

4.3. Jumlah *n* Suku Pertama dari Generalisasi Bilangan Fibonacci Berderajat-*p*

Definisi 4.3.1.

Untuk $p \geq 1$, *misal* $T = (t_{ij})$ *menujukkan matriks berorde* $(p+2)\times(p+2)$ *dengan* $t_{11} = t_{21} = t_{22} = t_{2,p+2} = 1,\ t_{i+1,i} = 1$ *untuk* $2 \leq i \leq p+1$ *dan 0 untuk lainnya.*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & Q_p & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

dengan matriks Q_p *berukuran* $(p+1)\times(p+1)$ *yang telah didefinisikan sebelumnya.*

Diperoleh persamaan karakteristik matriks *T* adalah $(\lambda^{p+1} - \lambda^p - 1)\times(\lambda - 1) = 0$, sehingga *T* dapat didiagonalisasi.

Definisi 4.3.2.

Matriks C_n *berorde* $(p+2)\times(p+2)$ *yang ditunjukkan*

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ S_p(n) & & & \\ S_p(n-1) & & Q_p^n & \\ \vdots & & & \\ S_p(n-p) & & & \end{bmatrix},$$

Dimana matriks Q_p^n *telah didefinisikan sebelumnya.*

Teorema 4.3.3.

Jika diberikan matriks T dan C_n *berukuran, maka untuk* $n \geq 1$;

$$C_n = T^n.$$

Dimisalkan matriks R dan D_1 masing-masing berorde $(p+2)\times(p+2)$ sebagai berikut

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda_1^p & \lambda_2^p & \cdots & \lambda_{p+1}^p \\ -1 & \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_{p+1}^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{p+1} \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{p+1} \end{bmatrix},$$

dengan λ_i merupakan nilai eigen dari matriks Q_p untuk $1\le i\le p+1$.

Selanjutnya, dengan mengunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, terlihat bahwa $\det R=\det V_d{}^T$, dimana V_d merupakan matriks Vandermonde. Karena $V_d{}^T$ merupakan matriks invertibel, sehingga R juga invertibel. Kemudian, karena T dapat didiagonalisasikan maka dapat diasumsikan $R^{-1}TR=D_1$, dan terbukti $TR=RD_1$ maka pernyataan $R^{-1}TR=D_1$ benar, berakibat $T^nR=RD_1^n$. Pada Teorema 3.3.3 telah terbukti bahwa $T^n=C_n$, maka persamaan $T^nR=RD_1^n$ dapat ditulis sebagai $C_nR=RD_1^n$.

Teorema 4.3.4.
Jika $S_p(n)$ merupakan jumlah n suku pertama dari generalisasi bilangan Fibonacci berderajat p, maka

$$S_p(n)=F_p(n+p+1)-1.$$

Bukti:
Diketahui dari hasil perkalian matriks antara matriks C_n dan R bahwa $(C_nR)_{2,1}=-1$, sehingga dapat dibentuk persamaan berikut

$$S_p(n)-\left(\sum_{i=0}^{p}F_p(n+1-i)\right)=-1\ .$$

Selanjutnya, persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_p(n)-F_p(n+p+1)=-1.$$

Jadi $S_p(n)=\sum_{i=1}^{n}F_p(i)=F_p(n+p+1)-1$. ■

5. KESIMPULAN

1. Proses terbentuknya formula Binet pada bilangan Fibonacci dengan metode matriks yaitu:
   (a). Membentuk dua persamaan linear berdasarkan definisi bilangan Fibonacci dan mengubahnya ke persamaan matriks, sehingga diperoleh persamaan umum:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = Q^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

(b). Menghitung Q^n dengan menggunakan matriks D yang merupakan matriks diagonal yang memuat nilai-nilai eigen dari matriks Q dan matriks S yang merupakan matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor eigen dari Q. Sehingga diperoleh:

$$Q^n = SD^nS^{-1}. \tag{4.2}$$

(c). Mensubstitusi persamaan (4.2) ke persamaan (4.1) sehingga terbentuk formula Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1{}^n - \lambda_2{}^n),\ \text{dengan}\ \lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\ \text{dan}\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

2. Berikut generalisasi dari formula Binet pada bilangan Fibonacci berderajat-*p*:

$$F_p(n) = \frac{\det(V_1^{(2)})}{\det(V_d)} = \frac{\det(V_{p+1}^{(1)})}{\det(V_d)},$$

dengan $i = 2,\ j = 1$ atau $i = 1,\ j = p+1$ dan $V_j^{(i)}$ merupakan matriks yang diperoleh dari matriks Vandermonde, dengan mengganti kolom ke-j dengan matriks $d_k^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+p+1-i} \\ \lambda_2^{n+p+1-i} \\ \vdots \\ \lambda_{p+1}^{n+p+1-i} \end{bmatrix}$.

3. Jumlah n suku pertama pada bilangan Fibonacci berderajat-*p* dinyatakan dengan formula berikut: $S_p(n) = F_p(n+p+1) - 1$.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan Pantun Silaban dan I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.

[2] Ayres, F. 1984. *Matriks*. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.

[3] Dunlap, R.A. 1997. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. Word Scientific, United State of America.

[4] Fraleigh, J.B. 1995. *Linier Algebra*. Addison-Wesley. United State of America

[5] Kilic, E. 2007. *European Journal of Combinatorics*. The Binet Formula, sums and representations of generalized Fibonacci p-numbers. TOBB ETU University of Economics and Technologi, Mathematics Departement, 06560 Sogutozu, Ankara, Turkey

[6] Stakhov, A.P. 2006. *Chaos, Solitions & Fractals*. Fibonacci Matrices, A Generalization of The “Cassini Formula”, and A New Coding Theory. Taganrog State University of Radio Engineering, Rusia.