PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA GRAF H-BINTANG DAN A-BINTANG

Nurul Huda[1], Zulfi Amri[2]

[1]Staf Pengajar Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UNLAM, Banjarbaru
[2]Peneliti P3SWOT Kementrian Pendidikan Nasional

e-mail: huda.oke@gmail.com, zulfi_ghifarri@yahoo.com,

ABSTRAK

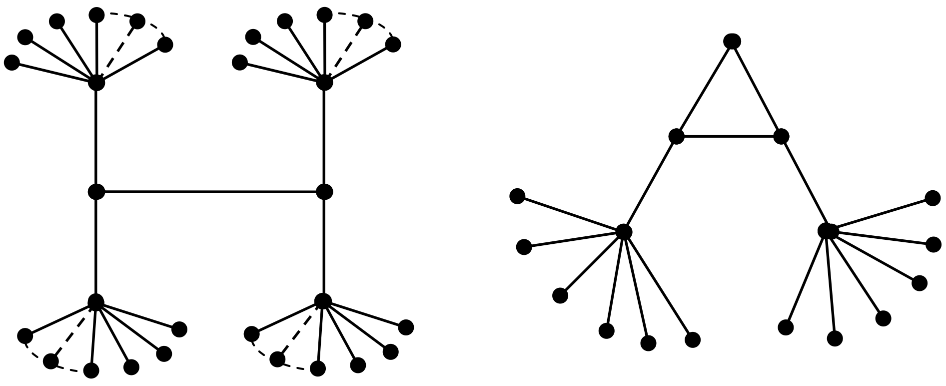
Graf G = (V,E) adalah sepasang himpunan terurut dimana V adalah himpunan simpul tak kosong dan E adalah himpunan busur. Pelabelan pada graf G adalah penetapan nilai simpul dan busur atau keduanya dengan aturan tertentu. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots.|E|\}$ *yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan* $\{1,2,\ldots.|E|\}$ *dimana setiap busur uv ∈ E dengan simpul u,v ∈ V berlaku α' (uv) =* $|\alpha(u) - \alpha(v)|$. *Pelabelan skolem graceful adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif μ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan* $\{1,2,\ldots.|V|\}$ *yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan* $\{1,2,\ldots.|E|\}$ *dimana setiap busur uv ∈ E dengan simpul u,v ∈ V berlaku μ' (uv) =* $|\mu(u) - \mu(v)|$. *Pelabelan* $\hat{\rho}$ *adalah modifikasi lain dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan* $\{0,1,2,\ldots.|E|+1\}$ *yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan* $\{1,2,\ldots.|E|\}$ *dimana setiap busur uv ∈ E dengan simpul u,v ∈ V berlaku γ' (uv) =* $|\gamma(u) - \gamma(v)|$. *Graf H-bintang dibentuk dari huruf H dan semua daunnya diberikan graf bintang* S_n. *Graf A-bintang dibentuk dari huruf A dan semua daunnya diberikan graf bintang* S_n.*Pada makalah ini diberikan konstruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan* $\hat{\rho}$ *untuk graf H-bintang dan A-bintang.*

Kata kunci : *pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful, pelabelan* $\hat{\rho}$, *graf ilalang* *(*S_n*,3), graf H-bintang dan graf A-bintang.*

1. PENDAHULUAN

Graf G adalah sepasang himpunan (*V*,*E*) dimana *V* adalah suatu himpunan tak kosong dan *E* adalah suatu himpunan (mungkin kosong yang berisi pasangan-pasangan (tak terurut) dari anggota-anggota *V*= $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\}$ dan anggota-anggota *E* = $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots\}$ masing-masing disebut simpul dan busur dari graf G. Banyaknya anggota *V* dinyatakan dengan $|V|$ dan banyaknya anggota *E* dinyatakan dengan $|E|$. Graf yang digunakan dalam makalah ini adalah graf sederhana tak berarah.

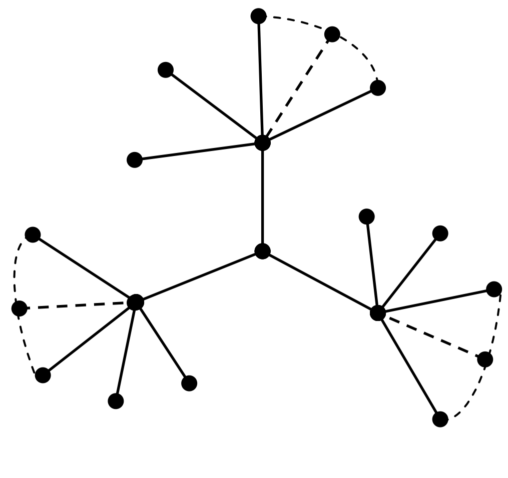
Pemilihan graf H-bintang dan A-bintang di latar belakangi dari graf $(S_n, 3)$, jika graf bintang pada graf $(S_n, 3)$ di hilangkan maka graf tersebut berbentuk seperti huruf Y kemudian muncul suatu pertanyaan bagaimana jika abjad diberikan graf bintang pada daun-daunnya sehingga mengkontruksi graf H-bintang dan Graf A-bintang. Sedangkan huruf I,L,M,N,V,W dan huruf Z akan membentuk graf kartefilan beserta dengan variasinya, sedangkan huruf K dan X akan membentuk graf $(S_n, 4)$ serta hurup T dan huruf Y sendiri membentuk graf $(S_n, 3)$. Berikut diberikan contoh graf H-bintang dan Graf A-bintang.



Gambar 1.1 Graf H-Bintang dan Graf A-Bintang

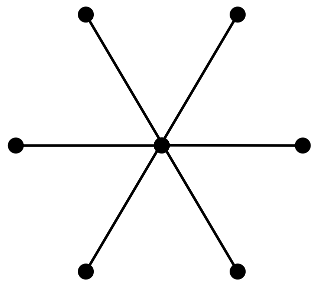
Pelabelan graceful pada graf G(*V*,*E*) adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \ldots . |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2, \ldots . |E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u*,*v* ∈ *V* berlaku α' (*uv*) = $|\alpha(u) - \alpha(v)|$. **Pelabelan skolem graceful** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif μ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{1,2, \ldots . |V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2, \ldots . |E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u*,*v* ∈ *V* berlaku μ' (*uv*) = $|\mu(u) - \mu(v)|$. **Pelabelan $\hat{\rho}$** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul *V* ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \ldots . |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur *E* ke himpunan bilangan $\{1,2, \ldots . |E|\}$ dimana setiap busur *uv* ∈ *E* dengan simpul *u*,*v* ∈ *V* berlaku γ' (*uv*) = $|\gamma(u) - \gamma(v)|$.[1,2,3]. Beberapa graf yang telah dibuktikan memiliki pelabelan graceful, skolem graceful dan atau Pelabelan $\hat{\rho}$ diantaranya adalah sebagai berikut : graf bintang S_n, graf sapu $B_{4,k}$, graf cumi-cumi $Sq_{4,n}$, graf carterpilar, graf cycle, graf super star graf $(S_n, 3)$. Selain itu sevenhot juga membuktikan gabungan dari beberapa graf yakni, graf $2S_n$, graf $S_n \cup S_{n+1}$, graf $S_n \cup B_{4,k}$, graf $S_n \cup Sq_{4,m}$ [4].

Graf $(S_n, 3)$ adalah suatu graf yang dibangun dari 3 graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul *c* disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan sebuah simpul *c* tersebut [1].



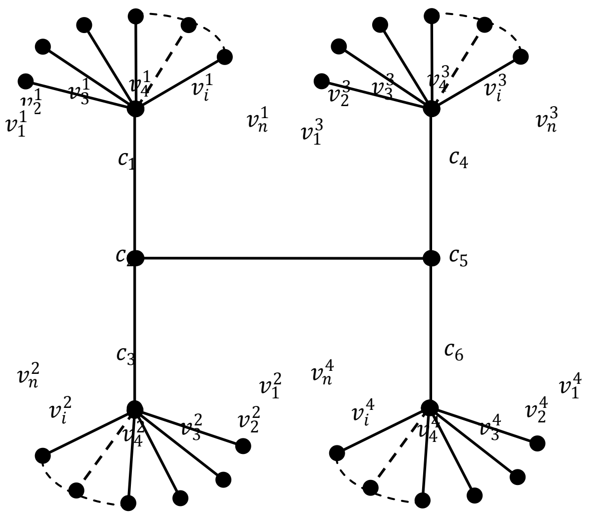
Gambar 1.2 Graf

Graf bintang S_n adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat kemudian menambahkan sejumlah simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf bintang memiliki *n*+1 simpul dan *n* busur [2]



Gambar 1.3 Graf

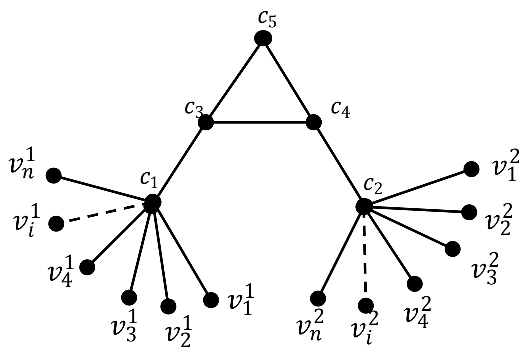
Graf H-Bintang adalah suatu graf yang dibangun dari bebapa graf bintang S_n kemudian diberikan suatu graf berbentuk huruf H besar dimana setiap simpul berderajat satu pada graf H merupakan pusat graf bintang. Berikut diberikan contoh graf H-bintang



Gambar 1.4 Penamaan Graf H-

Graf A-Bintang adalah suatu graf yang dibangun dari graf yang berbentuk huruf A kemudian diberikan graf bintang S_n pada daun-daunnya. Berikut diberikan contoh graf A-Bintang.

Graf H-Bintang adalah suatu graf yang dibangun dari bebapa graf bintang S_n kemudian diberikan graf berbentuk huruf A besar dimana setiap simpul berderajat satu pada graf A merupakan pusat graf bintang. Berikut diberikan contoh graf A-bintang



Gambar 1.5 Penamaan Graf A-

2. PELABELAN PADA GRAF H-BINTANG

Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan skolem graceful dan pelabelan pada graf H-Bintang.

Teorema 2.1 Graf H-Bintang memiliki pelabelan graceful

Bukti. Misalkan notasi simpul graf H-Bintang diberikan pada Gambar 1.4

Pada Gambar 1.4 diatas terlihat bahwa himpunan simpul Graf H-Bintang adalah $\{c_1, \dots, c_6, v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_n^3, v_1^4, \dots, v_n^4\}$, dan himpunan busur Graf H-Bintang adalah $\{c_1c_2, c_2c_3, c_2c_5, c_4c_5, c_5c_6, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_3v_1^2, \dots, c_3v_n^2, c_4v_1^3, \dots, c_4v_n^3, c_6v_1^4, \dots, c_6v_n^4\}$ maka jelas bahwa $|V| = 4n + 6$ dan $|E| = 4n + 5$. Didefinisikan pelabelan dengan menngunakan notasi α (alpha) untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_1) = 0 \qquad (2.1)$$
$$\alpha(c_2) = 3n + 5 \qquad (2.2)$$
$$\alpha(c_3) = 1 \qquad (2.3)$$
$$\alpha(c_4) = 2n + 3 \qquad (2.4)$$
$$\alpha(c_5) = n + 2 \qquad (2.5)$$
$$\alpha(c_6) = 2n + 4 \qquad (2.6)$$
$$\alpha(v_i^1) = 4n + 6 - i \qquad i = 1,2\dots,n \qquad (2.7)$$
$$\alpha(v_i^2) = 3n + 5 - i \qquad i = 1,2\dots,n \qquad (2.8)$$
$$\alpha(v_i^3) = n + 2 + i \qquad i = 1,2\dots,n \qquad (2.9)$$
$$\alpha(v_i^4) = i + 1 \qquad i = 1,2\dots,n \qquad (2.10)$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan *(2.1)-(2.10)*, melabelkan anggota V H-Bintang adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \dots, |E|\}$, $u, v \in V$.

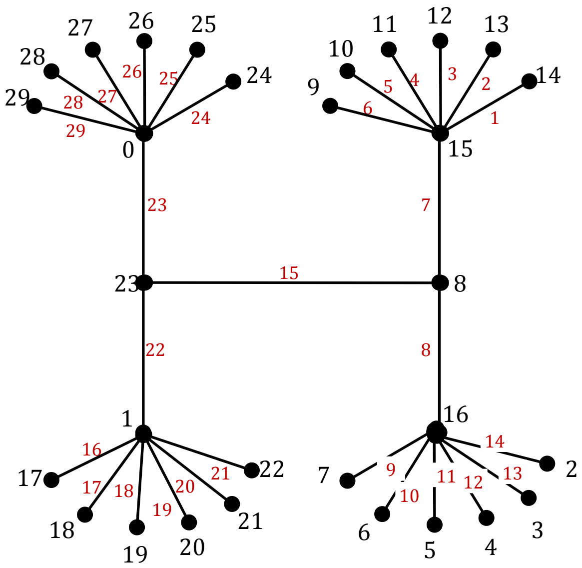
Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada H-Bintang yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\alpha'(c_1c_2) = |\alpha(c_1) - \alpha(c_2)|$$
$$= |(0) - (3n + 5)|$$
$$= |3n + 5| \qquad (2.11)$$
$$\alpha'(c_2c_3) = |\alpha(c_2) - \alpha(c_3)|$$
$$= |(3n + 5) - (1)|$$
$$= |3n + 4| \qquad (2.12)$$
$$\alpha'(c_2c_5) = |\alpha(c_2) - \alpha(c_5)|$$
$$= |(3n + 5) - (n+2)|$$
$$= |2n + 3| \qquad (2.13)$$
$$\alpha'(c_4c_5) = |\alpha(c_4) - \alpha(c_5)|$$
$$= |(2n + 3) - (n+2)|$$
$$= |n + 1| \qquad (2.14)$$
$$\alpha'(c_5c_6) = |\alpha(c_5) - \alpha(c_6)|$$
$$= |(n+2) - (2n + 4)|$$
$$= |n + 2| \qquad (2.15)$$
$$\alpha'(c_1v_i^1) = |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)|$$
$$= |(0) - (4n + 6 - i)|$$
$$= |4n + 6 - i| \qquad i = 1,2\dots,n \qquad (2.16)$$
$$\alpha'(c_3v_i^2) = |\alpha(c_3) - \alpha(v_i^2)|$$

$$
\begin{aligned}
& && = |\,(1) - (3n+5-i)| && \\
& && = |\,3n+4-i\,| && i = 1,2\ldots,n \qquad (2.17)\\
& \alpha'(c_4 v_i^3) && = |\alpha(c_4) - \alpha(v_i^3)| && \\
& && = |\,(2n+3) - (n+2+i)| && \\
& && = |\,n+1-i\,| && i = 1,2\ldots,n. \qquad (2.18)\\
& \alpha'(c_6 v_i^4) && = |\alpha(c_6) - \alpha(v_i^4)| && \\
& && = |\,(2n+4) - (i+1)| && \\
& && = |\,2n+3-i\,| && i = 1,2\ldots,n. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan *(2.1)-(2.10)* setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan *(2.11)–(2.19)* yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka α merupakan pelabelan graceful untuk graf H-Bintang ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf H-Bintang.



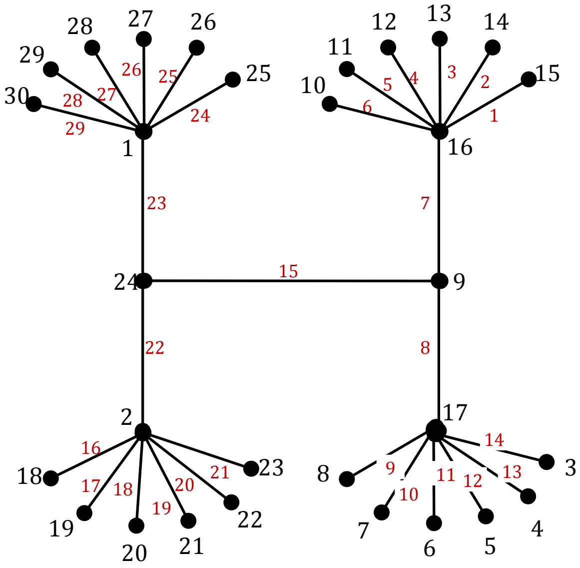
Gambar 1.6 Pelabelan Graceful Pada Graf H-

Untuk semua kelas graf graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf skolem graceful dengan mendefinisikan $\mu(v) = x(v) + 1$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.2 Graf H-Bintang memiliki pelabelan Skolem graceful
Bukti. Misalkan notasi vertek graf $(S_n, 3)$diberikan seperti pada Gambar 1.4
Didefinisikan pelabelan μ untuk simpul dengan menambahkan 1 pada setiap label simpulnya yang menggunakan pelabelan pada Teorema 2.1. Jadi $\mu(x) = \lambda(x) + 1$ untuk setiap $x \in V$ H-Bintang dengan λ adalah pelabelan pada bukti Teorema 2.1.
Pelabelan yang didefinisikan oleh μ akan melabelkan anggota V H-Bintang dengan pelabelan $\mu(V$ H-Bintang) adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{1,2,\ldots,|V|\}$, $u, v \in V$. Sehingga setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan $\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$ pada H-Bintang yang menghasilkan sama seperti persamaan *(2.11)–(2.19)*.

Berdasarkan pelabelan μ yang terdefinisikan dari bukti teorema 2.1 setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|V|\}$. Kemudian pelabelan μ' seperti persamaan $(2.11)-(219)$ yang diinduksi oleh pelabelan simpul μ seperti bukti Teorema (2.1), memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Maka μ merupakan pelabelan skolem graceful untuk graf H-Bintang.■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan skolem graceful untuk graf H-Bintang.



Gambar 1.7 Pelabelan Skolem Graceful Pada

Untuk semua kelas graf graceful dan graf skolem graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf $\hat{\rho}$ dengan mendefinisikan $\gamma(v) = \mu(v)$ atau $\gamma(v) = \alpha(v)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.3 Graf H-Bintang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$
Bukti. Misal graf H-Bintang ditunjukkan seperti pada Gambar 1.4
Menggunakan cara yang sama pada pembuktian graceful pada Teorema 2.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\gamma = \alpha$ seperti persamaan *(2.1)–(2.10)* dan pelabelan busur $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dimana $uv \in E$ dengan $u,v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari H-Bintang ke subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari $(S_n, 3)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Jadi graf H-Bintang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

3. PELABELAN PADA GRAF A-BINTANG

Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf A-Bintang.

Teorema 3.1 Graf A-Bintang memiliki pelabelan graceful
Bukti. Misalkan notasi simpul graf A-Bintang diberikan pada Gambar 1.5
Pada Gambar 1.5 diatas terlihat bahwa himpunan simpul V A-Bintang adalah $\{c_1,\dots,c_5, v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{2n}^2\}$ himpunan busur E A-Bintang adalah $\{c_1c_3, c_3c_5, c_2c_4, c_4c_5, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \dots, c_2v_n^2\}$ maka jelas bahwa $|V| = 2n + 5$ dan

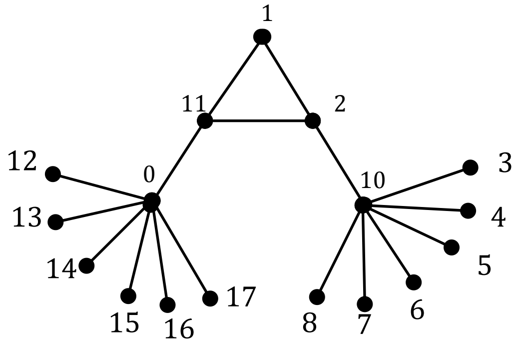
$|E|$ = $2n$ + 5. Didefinisikan pelabelan dengan menngunakan notasi α (alpha) untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_1) = 0 \qquad (3.1)$$
$$\alpha(c_2) = n + 4 \qquad (3.2)$$
$$\alpha(c_3) = n + 5 \qquad (3.3)$$
$$\alpha(c_4) = 2 \qquad (3.4)$$
$$\alpha(c_5) = 1 \qquad (3.5)$$
$$\alpha(v_i^1) = 2n + 6 - i \qquad = 1,2\ldots.,n \qquad (3.6)$$
$$\alpha(v_i^2) = i + 2 \qquad i = 1,2\ldots.,n \qquad (3.7)$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan *(3.1)-(3.7)*, melabelkan anggota V A-Bintang adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\},\ u, v \in V$.
Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada A-Bintang yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha'(c_1c_3) &= |\alpha(c_1) - \alpha(c_3)| \\
&= |(0) - (n + 5)| \\
&= |n + 5| && (3.8) \\
\alpha'(c_3c_5) &= |\alpha(c_3) - \alpha(c_5)| \\
&= |(n + 5) - (1)| \\
&= |n + 4| && (3.9) \\
\alpha'(c_2c_4) &= |\alpha(c_2) - \alpha(c_4)| \\
&= |(n + 4) - (2)| \\
&= |n + 2| && (3.10) \\
\alpha'(c_4c_5) &= |\alpha(c_4) - \alpha(c_5)| \\
&= |(2) - (1)| \\
&= |1| && (3.11) \\
\alpha'(c_1v_i^1) &= |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)| \\
&= |(0) - (2n + 6 - i)| \\
&= |2n + 6 - i| \qquad i = 1,2\ldots,n && (3.12) \\
\alpha'(c_2v_i^2) &= |\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)| \\
&= |(n + 4) - (i + 2)| \\
&= |n + 2 - i| \qquad i = 1,2\ldots,n && (3.13)
\end{aligned}$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan *(3.1)-(3.7)* setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots,|E|\}$ pada pelabelan simpul pada graf ini $n + 3$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α, memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan *(3.8)–(3.13)* yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\ldots,|E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka α merupakan pelabelan graceful untuk graf A-Bintang. ■
Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf A-Bintang.



Gambar 1.8 Pelabelan Graceful Pada Graf A-

Untuk semua kelas graf graceful dengan $|V| = |E|$ selalu tidak bisa mengkonstruksi pelabelan skolem graceful karena tidak akan bisa menunjukkan e_{maks} akan tetapi setiap pelabelan graceful bisa dikonstrusikan pelabelan $\hat{\rho}$ seperti akibat berikut:

Akibat 3.2 Graf A-Bintang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$
Bukti. Misal graf A-Bintang ditunjukkan seperti pada Gambar 1.1
Menggunakan cara yang sama pada pembuktian graceful pada Teorema 2.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\gamma = \alpha$ seperti persamaan *(3.1)–(3.7)* dan pelabelan busur $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dimana $uv \in E$ dengan $u,v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari A-Bintang ke subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari A-Bintang ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Jadi graf A-Bintang memiliki pelabelan $\hat{\rho}$.■

4. KESIMPULAN

Pada makalah ini telah diberikan kontruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf H-Bintang dan A-Bintang.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Amri,dkk. (2011). *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf $(S_n,3)$*. Prosiding Seminar Nasional UNY,Yogjakarta, hal M 131- M 136.

[2] Choudum, S. A., & Kishore, S. P. (1996). *All 5-star are Skolem graceful*. Indian J. Pure and Appl. Math,27 , 1101-1105.

[3] Galian, J. A. (2010). *Dynamic survey of graph Labeling*. Electronic Journal of Combinatorics,17,#ds6

[4] Sevenhot, Sugeng.K.A., Silaban, D.R., (2010). *Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Gabungan Dua Graf.* Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung, hal MS 183- MS 191