PENERAPAN TEORI KENDALI PADA MASALAH INVENTORI

Pardi Affandi, Faisal, Yuni Yulida
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru
Email: pardi_affandi@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini akan mengkaji tentang penerapan Teori Kendali pada masalah Inventori, akan dikembangkan model pertama di mana permintaan dinamis dan inventori tersedia sepanjang waktu. Pembahasan difokuskan pada analisis sistem inventori produksi yang berbentuk nonlinear dan biaya produksi diperlakukan sebagai fungsi yang masing-masing tingkat persediaan dan tingkat produksi. Kemudian diperluas model pertama ke model yang berikutnya di mana penurunan barang diperhitungkan. Tingkat kerusakan diperhitungkan sebagai fungsi waktu dengan jumlah yang sudah tersedia. Untuk kedua model, akan digunakan teori kontrol optimal untuk mendapatkan kebijakan pengendalian secara optimal, sehingga diperoleh hasil yang optimal.

Kata Kunci: *Teori Kendali, Masalah Inventori.*

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem, teori kontrol optimal dan beberapa aplikasinya. Salah satunya adalah masalah inventori, masalahnya adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Sehingga perusahaan tersebut harus membuat perencanaan yang baik dalam memproduksi barang agar sesuai dengan jumlah permintaan. Salah satunya dengan cara produk barang yang sudah jadi harus di muat dalam sebuah tempat sebelum dipesan oleh konsumen. Hal inilah yang menyebabkan munculnya *inventori* yang sudah tentu akan menambah biaya yaitu berupa *biaya penyimpanan* yang berupa biaya secara fisik menyimpan produk barang atau biaya yang muncul karena modal perusahaan terikat dalam bentuk barang. Masalah ini dapat dimodelkan dengan menggunakan teknik kontrol optimal matematika, pemrograman dinamis dan optimasi jaringan.

Permasalahan klasik dalam *inventori* berkaitan dengan perubahan permintaan untuk produk dan masalah lain adalah bagaimana menyeimbangkan antara kepentingan kelancaran produksi dengan harga penyimpanan inventori. Sehingga produksi dapat berjalan lancar sedangkan biaya penyimpanan inventori bisa diatur sesuai dengan permintaan konsumen.

Selain harus mengeluarkan biaya sebenarnya ada keuntungan memiliki *inventori* karena pertama inventori dapat dengan segera memenuhi permintaan konsumen kedua dengan adanya gudang sebagai tempat menyimpan inventori selama periode permintaan sedikit dan dapat melayani permintaan kembali pada saat periode permintaan tinggi.

Maka salah satu cara mengatasi permasalahan inventori adalah dengan kendali optimal, model persamaan diferensialnya terlebih dahulu disederhanakan. Kemudian menentukan nilai optimal dari model yang sudah disederhanakan tersebut.

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 FUNGSI KONVEKS

Berikut ini akan dibahas definisi dan teorema yang berhubungan dengan fungsi konveks yang akan dipakai pada pembahasan-pembahasan berikutnya.

Defenisi 2.1.1 (K.V Mital) *Andaikan* $X \in K \subset E^n$ *dimana K adalah himpunan konveks. Fungsi f(x) dikatakan konveks jika untuk setiap titik* x_1 *dan* x_2 *dalam K,*
$f(X) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$
untuk setiap $X = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$.

Teorema 2.1.2 (Mangasarian 1969) *Diberikan himpunan terbuka* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. *Fungsi* $\theta: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *terdifrensial di* $\bar{x} \in \Gamma$. *Jika* θ *konveks di* $\bar{x} \in \Gamma$ *maka* $\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x})$ *untuk setiap* $x \in \Gamma$.

2.2 SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Berikut ini akan dibahas solusi sistem persamaan diferensial homogen tanpa kendali (yaitu dengan kendali *u = 0*) *time vary*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) . \qquad (2.2.1)$$

Didefinisikan

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$$

yang merupakan penurunan deret Taylor untuk e^{at} dengan koefisien pangkatnya merupakan suatu matriks. Diberikan teorema tentang matriks transisi untuk sistem (2.2.1).

Teorema 2.2.1 *Matriks transisi sistem linear homogen* $\dot{x} = Ax$ *adalah* $e^{A(t-s)}$.

Bukti:

Bukti dilakukan dengan mensubstitusikan $e^{A(t-s)}$ ke persamaan $\dot{x} = Ax$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{A(t-s)} &= \frac{d}{dt}(I + A(t-s) + \frac{1}{2!}A^2(t-s)^2 + \cdots \\ &= A + A^2(t-s) + \cdots \\ &= A(I + A(t-s) + \cdots, \quad 3 \\ &= Ae^{A(t-s)} \text{ (terbukti).}\end{aligned}$$

Solusi sistem $\dot{x} = Ax$ dengan $x(0) = x_0$ dapat dinyatakan dengan $x(t) = e^{At}x_0$.

Berikut ini akan dilanjutkan dengan solusi solusi sistem nonlinear yang mengandung vektor kendali berbentuk

$$\dot{x}_i(t) = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0 \qquad (2.2.2)$$

2.3 MODEL INVENTORI

Inventori merupakan investasi yang paling besar pada sebagian besar perusahaan industri. Persediaan diperlukan untuk dapat melakukan proses produksi, penjualan persediaan bahan mentah dan barang dalam proses diperlukan untuk menjamin kelancaran proses produksi, sedangkan bahan jadi harus tetap tersedia agar memungkinkan perusahaan memenuhi permintaan yang terjadi. Persediaan inventori ditempatkan pada beberapa titik dalam proses produktif dengan arus (flows) yang menghubungkan satu titik persediaan kepada titik lain. Tingkat suatu persediaan dapat ditambahkan (replenished) adalah kapasitas suplai dan tingkat penurunan persediaan (stock depletion) adalah demand. Inventori bertindak sebagai penyangga (bufffer) antara perbedaan tingkat antara suplai dan demand.

Manajemen inventori merupakan salah satu di antara fungsi manajemen operasi yang sangat penting karena inventori memerlukan banyak modal dan mempengaruhi penyerahan kepada pelanggan. Manajemen inventori mempunyai damfak terhadap semua fungsi bisnis, terutama operasi, pemasaran dan keuangan. Inventori memberikan layanan kepada pelanggan yang sangat vital bagi pemasaran. Keuangan berkaitan dengan keadaan keuangan di seluruh organisasi, termasuk dana yang dialokasikan untuk inventori. Dan operasi memerlukan inventori untuk menjamin produksi yang lancar dan efisien.

Dalam model inventori memiliki banyak model dengan metode penyelesaian yang berkisar dari kalkulus sederhana dan matematis yang canggih. Hal ini tergantung pada sifat permintaan akan sebuah barang. Sehingga berdasarkan permintaan model inventori terbagi menjadi dua kelompok besar yaitu deterministik dan probabilistik. Model deterministik yaitu model inventori dimana permintaan diketahui dengan pasti, ada jenisnya yang statis ada juga yang dinamis. Sedangkan model deterministik yaitu model inventori dimana permintaan tidak diketahui dengan pasti, ada jenisnya yang stasioner yaitu fungsi kepadatan probabilitas permintaan tetap dan ada yang tidak stasioner yaitu fungsi kepadatan probabilitasnya berubah-ubah.

Salah satu jenis inventori deterministik adalah Economic Order Quantity (EOQ) yang merupakan salah satu model inventori deterministik dalam menentukan jumlah optimal kuantitas inventori dalam rangka meminimalkan biaya tahunan. Model EOQ klasik mengasumsikan bahwa Jumlah permintaan per tahun diketahui dengan pasti dan konstan sepanjang tahun dan ketika persediaan mencapai titik nol, pemesanan baru seketika dilakukan dan langsung diterima seketika itu juga sehingga tidak terjadi kekurangan persediaan.

Menurut Shore (1973) inventori adalah "suatu sumber daya yang menganggur dari berbagai jenis yang mempunyai nilai ekonomis potensial". Dengan pengertian ini Shore mempunyai anggapan peralatan dan pekerja yang menganggur sebagai inventori, padahal kita menentukan segala sumber daya yang menganggur selain bahan sebagai kapasitas. Dari sumber perspektif manajemen dan akunting sangatlah penting membedakan inventori dengan kapasitas. Kapasitas menyajikan potensi untuk memproduksi, sedang inventori adalah produk pada beberapa titik dalam proses konversi (perubahan) dan distribusi.

2.5 TEORI KENDALI OPTIMAL

Pada bagian ini akan dibahas masalah kendali optimal khususnya pada kasus dengan *state* akhir dan waktu akhir diketahui. Untuk permasalahan ini, penyelesaian menggunakan prinsip maksimum **pontryagin**.

Perumusan masalah Kendali Optimal

Diberikan sebuah system : $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]t\epsilon$ (T_1,T_2)

Dengan x(t) vektor state (vektor yang menyatakan keadaan sistem) berukuran nx1 yaitu $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$,$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)]$ berukuran mx1, f sebuah fungsi bernilai vektor berukuran nx1 yaitu $f = [f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ dan (T_1,T_2) C R domain dari sistem awal.

Pada sistem ini diasumsikan $0 < m \leq n$. Diberikan juga L suatu fungsi berharga real pada $R^n x R^m x(T_1,T_2)$ berbentuk $L = [x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m, t]$dan k fungsi berharga real $R^n x(T_1,T_2)$ berbentuk $K = [x_1, x_2, \ldots, x_n, t]$

Himpunan S C $R^n x(T_1,T_2)$ dengan elemen-elemen berupa pasangan titik (x,t) dengan x state dan t dalam domain sistem disebut target.

Diasumsikan untuk setiap t dalam domain (T_1,T_2) dari sistem awal, terdapat himpunan bagian U_t dalam R^m. Misalkan koleksi semua U_t dilambangkan dengan Ώ yaitu

Ώ = { U_t : t ϵ (T_1,T_2) }

U_t disebut kendala (constraint) pada waktu t dan Ω disebut kendala. Jika U merupakan himpunan semua u(t) untuk setiap t dalam (T_1,T_2) sehingga :
U(t) $\in$ U_t : untuk setiap t $\in$ (T_1,T_2).
Maka u disebut himpunan semua kendali yang memenuhi kendala Ω atau himpunan semua admissible kontrol.

Diberikan $t_0 \in (T_1,T_2)$ dan x_0 ellemen di R^n maka u $\in$ U (admissible kontrol u), misal notasi :
$\varphi(t; U_{(t_0,t]}, x_0)$
Dengan $U_{(t_0,t]}$ menyatakan kendali pada selang waktu $(t_0,t]$, adalah penyelesaian tunggal dari sistem (3.1) yang memenuhi syarat awal x(t_0)= x_0. Kendali U dikatakan membawa x_0 ke target set S (atau $(x_0,t_0]$ ke S). Jika himpunan $\{(\varphi(t; U_{(t_0,t]}, x_0), t \geq t_0)\}$ beririsan dengan S. Jika t_1 waktu pertama kali x(t) = $\varphi(t; U_{(t_0,t]}, x_0)$ masuk di dalam S, maka notasi x_1 = x(t_1) = $\varphi(t; U_{(t_0,t]}, x_0)$ menyatakan kondisi akhir sistem.

Pada sistem kendali optimal, masalah yang dihadapi adalah memaksimumkan fungsi berharga real pada R^nx(T_1,T_2) xUxR^n, yang didefenisikan dengan

$$\tilde{J}(x_0,t_0,u,x,t) = K(x,t) + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t),t)\ dt$$

dengan K dan L fungsi-fungsi yang telah diperkenalkan di awal. Dengan kondisiawal x(t_0)= x_0 dan kondisi akhir awal $x_1 = x(t_1)$ fungsi $\tilde{J}(x_0,t_0,u,x_1,t_1)$ ditulis dengan $\tilde{J}(x_0,t_0,u)$, yaitu

$$\tilde{J}(x_0,t_0,u) = K(x_1,t_1) + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),u(t),t)\ dt$$
$$= K[\varphi(t_1; U_{(t_0,t]}, x_0), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi(t; U_{(t_0,t]}, x_0), u(t), t)\ dt$$

Maka $J(x_0,t_0,u)$ dapat dinyatakan sebagai J(u) saja. Dari keterangan tersebut di atas, masalah kendali optimal dapat dinyatakan sebagai sistem dengan targaet set S, performance fungsional $J(x_0,t_0,u)$, himpunan admissible kontrol U, dan state awal X_0 pada waktu t_0 adalah menentukan kendali u $\in$ U yang memaksimalkan performance functional $J(u)$.
Sebarang kendali u_* yang memberikan solusi terhadap masalah kendali optimal disebut dengan kendali optimal.
Pada kasus kendali optimal dengan state akhir dan waktu akhir diketahui, target set S berbentuk S = $\{x_1\}$x$\{t_1\}$ yaitu berupa titik (x_1,t_1) dengan x_1 elemen tertentu di R^n dan t_1 elemen tertentu di (T_1,T_2).

3.HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 MODEL TANPA KEKURANGAN BARANG

Sebuah perusahaan manufaktur yang memproduksi sebuah produk. Diasumsikan bahwa keputusan manajer di masa yang akan datang dihadapkan terbatas, dengan panjang perencanaan sebesar T. Keterbatasan rencana di masa yang akan datang adalah sangat penting dan harus tepat karena banyak perusahaan yang peduli dengan jangka menengah kegiatan pasar.

Untuk t $\geq$ 0, misalkan I(t) adalah tingkat inventori pada waktu t, dan misalkan D(t,I(t)) dan h (I(t)) adalah masing-masing merupakan tingkat permintaan dan tingkat biaya. K(P(t)) menunjukkan tingkat biaya yang sesuai dengan tingkat produksi P(t) pada waktu t. Andaikan $\rho \geq 0$ menjadi tingkat potongan harga. Semua fungsi diasumsikan non-negatif, kontinu dan terdiferensialkan.

Mengingat T > 0, masalah kontrol optimal akan diperoleh sebagai berikut:

$$(\rho)\quad \begin{cases} \min\limits_{P(t)\geq D(t,I(t))} J(P,I)=\int_0^T e^{-\rho t}\left\{h(I(t))+K(P(t))\right\}dt \\ \dfrac{d}{dt}I(t)=P(t)-D(t,I(t)),\ \ I(0)=I_0, I(T)=I_T \end{cases}$$

Model digambarkan sebagai masalah kontrol optimal dengan satu state variabel yaitu tingkat inventori, dan satu variabel kontrol yaitu tingkat manufaktur. Pada saat permintaan terjadi pada tingkat D dan produksi terjadi pada tingkat kendali P, maka I(t) berkembang sesuai dengan dinamika berbentuk state persamaan. Kendala P(t) ≥ D(t,I(t)) dengan persamaan state diperoleh I(t) ≥ I_0 dan tingkat I senantiasa tidak kekurangan. Oleh karena itu, kekurangan tingkat I tidak diperbolehkan.

Dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin diperoleh kondisi yang diperlukan (P*,I*) menjadi penyelesaian masalah yang optimal (ρ) harus konstan β, kontinu dan fungsi terdiferensialkan λ dan sebuah fungsi kontinu μ, disebut fungsi Lagrange multiplier, sehingga :

$H(t,I^*,P^*,\lambda) \geq H(t,I^{**},P,\lambda)$ sehingga setiap $P(t) \geq D(t,I^*(t))$ (1)

$$\frac{-d}{dt}\lambda(t)=\frac{\partial}{\partial I}L(t,I,P,\lambda,\mu) \quad (2)$$

$I(0) = I_0$, $\lambda(t) = \beta$, (3)

$$\frac{\partial}{\partial P}L(t,I,P,\lambda,\mu)=0, \quad (4)$$

$$P(t)-D(t,I(t))\geq 0,\ \ \mu(t)\geq 0,\ \ \mu(t)\left[P(t)-D(t,I(t))\right]=0, \quad (5)$$

Dimana :

$$H(t,I,P,\lambda)=-e^{-\rho t}\left\{h(I(t))+K(P(t))\right\}+\lambda(t)\left\{P(t)-D(t,I(t))\right\} \quad (6)$$

adalah merupakan fungsi Hamiltonian dan

$$L(t,I,P,\lambda,\mu)=-e^{-\rho t}\left\{h(I(t))+K(P(t))\right\}+\left[\lambda(t)+\mu(t)\right]\left\{P(t)-D(t,I(t))\right\}, \quad (7)$$

adalah fungsi Lagrange. Persamaan (2) adalah equivalen dengan

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=e^{-\rho t}\frac{d}{dI}h(I(t))+\left[\lambda(t)+\mu(t)\right]\frac{\partial}{\partial I}D(t,I(t)). \quad (8)$$

Persamaan (4) adalah equivalen dengan

$$\lambda(t)+\mu(t)=e^{-\rho t}\frac{d}{dP}K(P(t)). \quad (9)$$

Berdasarkan persamaan (5). Untuk sebarang t, kita dapatkan salah satu dari $P(t)-D(t,I(t))=0$ atau $P(t)-D(t,I(t))>0$.

Kasus 1

$P(t)-D(t,I(t))=0$, dalam beberapa subset S pada interval [0,T]. Kemudian $\frac{d}{dt}I(t)=0$ pada S. Dalam kasus ini I* jelas konstan pada S dan

$P^*(t) = D(t,I^{**}(t))$ (10)

untuk setiap $t \in S$.

Dengan subsitusi persamaan (9) ke persamaan (8) maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=e^{-\rho t}\left[\frac{d}{dI}h(I^*(t))+\frac{d}{dP}K(P^*(t))\frac{\partial}{\partial I}D(t,I^*(t))\right].$$

Dengan mengintegralkan persamaan ini kita mendapatkan bentuk eksplisit fungsi adjoint λ dari konstanta β. Lalu bentuk eksplisit fungsi pengali Lagrange μ dapat diperoleh dari Persamaan (9). Perhatikan bahwa jika μ adalah fungsi yang diperoleh tidak non-negatif, maka solusi yang diberikan dalam Persamaan (10) tidak dapat berlaku.

Kasus 2

$P(t)-D(t,I(t)) > 0$, untuk $t\in[0,T]\backslash S$. Kemudian $\mu(t) = 0$ dalam $[0,T]\backslash S$.

Dalam kasus ini dengan kondisi (3), (8) dan (9) menjadi

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=e^{-\rho t}\frac{d}{dI}h(I(t))+\frac{\partial}{\partial I}D(t,I(t)),\ I(0)=I_0,\ \lambda(T)=\beta,\ \text{ dan}$$

$$\lambda(t)=e^{-\rho t}\frac{d}{dP}K(P(t)).$$

Dengan mengkombinasikan persamaan ini dengan persamaan state akan memberikan hasil persamaan differensial orde dua :

$$\frac{d}{dt}P(t)\frac{d^2}{dP^2}K(P)-\left[\rho+\frac{\partial}{\partial I}D(t,I)\right]\frac{d}{dP}K(P)=\frac{d}{dI}h(I),\ I(0)=I_0,\frac{d}{dP}K(P(T))=\beta e^{-\rho T} \quad (11)$$

Dari ilustrasi tersebut akan diperoleh, misalkan $K(P) = \frac{KP^2}{2}$, $h(I) = \frac{hI^2}{2}$ dan $D(t,I) = d_1(t) + d_2(I)$ dimana K,h dan d_2 adalah konstanta positive. Dari fungsi ini berarti diperoleh (P^*,I^*) merupakan masalah optimal berarti solusi (ρ) menjadi :

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t)-\rho\frac{d}{dt}I(t)-\left[\frac{h}{K}+d_2(\rho+d_2)\right]I(t)=(\rho+d_2)d_1(t),\ I(0)=I_0,I(T)=I_T \quad (12)$$

Ini merupakan masalah nilai awal dengan dua titik batas (ρ_{TPBV}) yang akan diselesaikan dalam proposisi berikut :

Proposisi 1

Solusi I* dari (ρ_{TPBV}) diberikan oleh

$$\mathrm{I}^*(\mathrm{t}) = \mathrm{a}_1\mathrm{e}^{\mathrm{m}_1\mathrm{t}} + \mathrm{a}_2\mathrm{e}^{\mathrm{m}_2\mathrm{t}} + \mathrm{Q}(\mathrm{t}), \quad (13)$$

dan P * diberikan oleh

$$\mathrm{P}^*(\mathrm{t}) = \mathrm{a}_1(\mathrm{m}_1+\mathrm{d}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{m}_1\mathrm{t}}+\mathrm{a}_2(\mathrm{m}_2+\mathrm{d}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{m}_2\mathrm{t}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{Q}(\mathrm{t})+\mathrm{d}_2\mathrm{Q}(\mathrm{t})+\mathrm{d}_1(\mathrm{t}) \quad (14)$$

di mana konstanta a_1, a_2, m_1, dan m_2 diberikan dalam pembuktian di bawah ini, dan Q(t) adalah solusi kusus Persamaan (12).

Bukti

Persamaan (12) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode standard. Maka diperoleh persamaan karakteristiknya

$$m^2-\rho m-\left[(\frac{h}{K}+d_2)d_2\right]=0$$

mempunyai dua akar nyata berlawanan tanda, akan diperoleh nilai dari

$$m_1=\frac{1}{2}\left(\rho-\sqrt{\rho^2+4\left[\frac{h}{K}+(\rho+d_2)d_2\right]}\right)<0 \ \text{ dan }\ m_2=\frac{1}{2}\left(\rho+\sqrt{\rho^2+4\left[\frac{h}{K}+(\rho+d_2)d_2\right]}\right)>0$$

dan karena itu I*(t) diberikan oleh (13), di mana Q (t) adalah solusi tertentu dari persamaan (12). Kondisi awal dan akhir digunakan untuk menentukan konstanta a_1 dan a_2 sebagai berikut.

Dari kondisi awal dan kondisi akhir diperoleh $a_1 + a_2 + Q(0) = I_0$ dan $a_1 e^{m_1 T} + a_2 e^{m_2 T} + Q(t) = I_T$.

Dengan memisalkan nilai $b_1 = I_0 - Q(0)$ dan $b_2 = I_T - Q(T)$, akan diperoleh sistem dua persamaan linear dengan dua variable yang tidak diketahui yaitu

$$a_1 + a_2 = b_1$$

$$a_1 e^{m_1 T} + a_2 e^{m_2 T} = b_2$$

yang memiliki solusi unik berikut :

$$a_1 = \frac{b_2 - e^{m_2 T} b_1}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}} \quad \text{dan} \quad a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 T} - b_2}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}}$$

Pernyataan dari P* disimpulkan menggunakan pernyataan I* dan persamaan state. Dari analisis di atas kita memiliki ciri teorema berikut solusi optimal (ρ).

TEOREMA 1

Solusi optimal (P*, I*) dari (ρ) mempunyai bentuk yang diberikan dalam Persamaan (10) pada S, dan bentuk dalam Persamaan (13) - (14) pada [0, T] \ S.

CONTOH 1.

Perhatikan sebuah sistem produksi dengan karakteristik sebagai berikut:

Awal dan tingkat persediaan akhir, masing-masing I(0) = 0, I(T) = 10; satuan biaya dan faktor diskon h = 0.1, K = 5, dan ρ = 0. Rencana yang akan datang adalah T = 5, dan permintaan stock-dependent adalah sedemikian rupa sehingga d_2 = 0,1, $d_1(t)$ = cos (t) + 1. Variasi tingkat produksi optimal dan tingkat persediaan yang optimal ditampilkan dalam Gambar 1.

Biaya yang optimal ditemukan untuk J = 139,5014. Mengubah bentuk fungsi permintaan dengan mengambil $d_1(t)$ = e^{-t} dan menjaga semua parameter lainnya tidak berubah menghasilkan grafik digambarkan dalam Gambar 2. Nilai fungsi tujuan berubah ke J = 87,9876.

4.2 MODEL DENGAN KETERGANTUNGAN BARANG

Dalam bagian ini, diasumsikan bahwa produk mengalami kemerosotan sementara di stok. Untuk t ≥ 0, andaikan θ (t, I (t)) adalah tingkat kemerosotan pada tingkat persediaan I(t) pada waktu t. Dengan menggunakan notasi yang sama seperti pada bagian sebelumnya.

Masalah pengendalian optimal menjadi:

$$(\rho\vartheta)\begin{cases} \displaystyle\min_{P(t)\geq D(t,I(t))+\vartheta(t,I(t))} J(P,I) = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{h(I(t)) + c\left[P(t) - D(t,I(t))\right] + K(P(t))\right\} dt \\[2ex] \displaystyle\frac{d}{dt} I(t) = P(t) - D(t,I(t)) - \vartheta(t,I(t)), \quad I(0) = I_0, I(T) = I_T \end{cases}$$

di mana c > 0 adalah biaya unit. Kondisi yang diperlukan (1) - (4) tetap sama dengan

$$H(t,I,P,\lambda) = -e^{-\rho t}\left[h(I) + C(P(t)) - D(t,I) + K(P)\right] + \lambda(t)\left[P(t) - D(t,I) - \vartheta(t,I)\right] \qquad (15)$$

$$L(t,I,P,\lambda,\mu)=-e^{-\rho t}(t,I,P,\lambda(t))+\mu(t)\left[P(t)-D(t,I)-\vartheta(t,I)\right] \quad (16)$$

Sehingga persamaan (5) menjadi

$$P(t)-D(t,I)-\vartheta(t,I)\geq 0, \quad \mu(t)\geq 0,\ \mu(t)\left[P(t)-D(t,I)-\vartheta(t,I)\right]=0 \quad (17)$$

Dari persamaan (2), (4) dan (16) diperoleh

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=e^{-\rho t}\left[\frac{d}{dI}h(I)-C\frac{\partial}{\partial I}D(t,I)\right]+(\lambda(t)+\mu(t))\left[\frac{\partial}{\partial I}D(t,I)+\frac{\partial}{\partial I}\vartheta(t,I)\right] \quad (18)$$

$$\lambda(t)+\mu(t)=e^{-\rho t}\left[\frac{d}{dP}K(P)+C\right] \quad (19)$$

Sekarang dengan menggunakan (17). Kemudian, dalam beberapa subset S pada [0,T] akan diperoleh $P(t)-D(t,I(t))-\vartheta(t,I(t))=0$ sehingga optimal control dari kasus ini adalah :

$$P^*(t)=D(t,I^*(t))-\vartheta(t,I^*(t)),\ \textit{untuk setiap}\ t\in S. \quad (20)$$

Pada set [0,T]\S, nilai dari $P(t)-D(t,I(t))-\vartheta(t,I(t))>0$. Menggunakan argumen yang sama seperti pada bagian sebelumnya, diperoleh persamaan diferensial orde dua sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}P(t)\frac{d^2}{dP^2}K(P)-\left[\rho+\frac{\partial}{\partial I}D(t,I)+\frac{\partial}{\partial I}\vartheta(t,I)\right]\left[\frac{d}{dP}K(P)+C\right]=\frac{d}{dI}h(I)-C\frac{\partial}{\partial I}D(t,I), \quad (21)$$

Dan I(0) = I_0, $\frac{d}{dP}K(P(T))=\beta e^{\rho t}$.

Kemudian diasumsikan K(P) = $\frac{KP^2}{2}$, h(I) = $\frac{hI^2}{2}$ danD(t,I) = d_1(t) + d_2(I) dan θ(t,I) = θ_1(t) + θ_2(I) dimana K,h, d_2, θ_2 adalah konstanta positif. Kemudian dari bentuk persamaan diferensial dalam P menjadi persamaan diferensial orde dua dalam bentuk I

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t)-\rho\frac{d}{dt}I(t)-\left[\frac{h}{K}+(d_2+\vartheta_2)(\rho+d_2+\vartheta_2)\right]I(t)=\alpha(t), \quad (22)$$

Dengan

α(t) = $(\rho+d_2+\vartheta_2)(d_1(t)+\vartheta_1(t))-\frac{d}{dt}d_1(t)+\frac{d}{dt}\vartheta_1(t)-cd_2$,

dan $I(0)=I_0, I(T)=I_T$.

Penyelesaian masalah nilai awal dengan dua titik batas berikut ini dengan menggunakan persamaan (13) diperoleh :

$$m_1=\frac{1}{2}\left(\rho-\sqrt{\rho^2+4\left[\frac{h}{K}+(\rho+d_2+\vartheta_2)(d_2+\vartheta_2)\right]}\right)$$

$$m_2=\frac{1}{2}\left(\rho+\sqrt{\rho^2+4\left[\frac{h}{K}+(\rho+d_2+\vartheta_2)(d_2+\vartheta_2)\right]}\right)$$

$$a_1=\frac{I_T-Q(T)-(I_0-Q(0))e^{m_2T}}{e^{m_1T}-e^{m_2T}},$$

$$a_2=\frac{(I_0-Q(0))e^{m_1T}-I_T+Q(T)}{e^{m_1T}-e^{m_2T}},$$

dimana Q (t) adalah solusi kusus dari persamaan (22).

Nilai dari P* disimpulkan menggunakan I* bersama dengan persamaan state. Akhirnya, seperti pada Teorema 2.1, solusi optimal (P*, I*) dari (ρ_θ) diberikan pada [0, T]\S oleh solusi dari persamaan diferensial (22) dan produksi yang optimal sesuai pada S, telah diberikan dalam bentuk (20).

CONTOH 2.
Mempertimbangkan sistem produksi Contoh 2.1 dan Misalkan I(T) = 20 dan biaya unit c = 0,1. Tingkat kerusakan sehingga $\theta_1(t) = \sin(t) + 1$, $\theta_2 = 0,1$. Kontrol yang optimal dan state akan ditampilkan dalam Gambar 3. Optimal nilai fungsi objektif J = 773,2404. Untuk menilai dampak dari tingkat kerusakan pada nilai fungsi tujuan yang optimal, kami menetapkan $\theta_1 = 0$ dan nilai bervariasi dari θ_2 dari 0,0005 hingga 0,256. Seperti yang ditunjukkan oleh tabel di bawah, hasil yang optimal sebagai θ_2 kenaikan biaya meningkat.

Θ_2	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016	0,032	0,064	0,128	0,256
J	426,97	449,14	450,54	453,37	459,05	470,53	493,98	542,78	647,62	883,77

4. KESIMPULAN

Kontrol yang optimal secara eksplisit diperoleh untuk dua level persediaan yang bergantung pada inventori produksi. Model ini dapat diperluas dalam berbagai cara. Misalnya bukannya meminimalkan total biaya, melainkan ingin memaksimalkan total unit produksi di mana tingkat pendapatan dari kedua fungsi dari waktu dan dari tingkat persediaan.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., 1988. *Calculus.* Drexel University, John Wiley & Sons, New York.

[2] Affandi, P., 2011. *Kendali Optimal system pergudangan dengan produksi yang mengalami kemerosotan*. Tesis, Yogyakarta.

[3] Burghes, D.N *Introduction to Control Theory Including Optimal Control* .John Wiley & Sons. New York.

[4] Chi-Tsong Chen, 1984. *Linear System Theory and Design,* Madison Avenue New York.

[5] Edwin K.P Chong, 1996. *An introduction to Optimization*, John Wiley & Sons. New York.

[6] Frank L.Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation*. The University of Texas at Arlington. New York.

[7] Hamdy A.Taha.1998. *Operations Research an Introduction*.Prentice Hall International, Inc.Philippines.

[8] Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, 1 . Delft University of Technlogy. Netherlands.

[9] Shepley L.Ross.1984. *Differential Equation.* 3 Editions, John Wiley & Sons. New York.

[10] Shety S.P and Thompson G.L 1985. *Optimal Control Theory : Applied to Management science and economics*. 2 editions.