Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.17 No.2 (Desember 2023) Hal. 177-185

HASIL KALI SILANG $\omega -$ SUBSEMIRING FUZZY

Saman Abdurrahman, Thresye, Alya Hanifah Arif, Jumiati, Tiara Roihatul Jannah

Program Studi Matematika, Universitas Lambung Mangkurat Banjarbaru
Jl. A. Yani Km 36, Banjarbaru, Kalimantan Selatan
email: *saman@ulm.ac.id*

ABSTRACT

Fuzzy semirings are one of the results of a combination of semirings and fuzzy sets. Semiring is one of the extensions of the ring. The cross product of two or more semirings gives a semiring. We are motivated to conduct cross-product research on fuzzy semiring based on the condition of cross-product semiring. This paper introduces the direct product of two (more) $\omega -$ fuzzy subsemirings. In addition, we investigate the relationship between the cross product of two (more) $\omega -$fuzzy subsemirings and the cross product of two (more) level subsets that are subsemiring.

Keywords: semiring,cross product, subset level, subset fuzzy

ABSTRAK

Semiring fuzzy merupakan salah satu hasil perpaduan antara semiring dengan himpunan fuzzy. Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring. Hasil kali silang dari dua atau lebih semiring menghasilkan semiring. Berdasarkan kondisi hasil kali silang pada semiring, kami termotivasi untuk melakukan penelitian hasil kali silang pada semiring fuzzy. Pada paper ini, kami memperkenalkan hasil kali langsung dari dua (lebih) $\omega -$ subsemiring fuzzy. Selain itu, kami menyelidiki keterkaitan hasil kali silang dua (lebih) $\omega -$ subsemiring fuzzy dengan hasil kali silang dua (lebih) level subset merupakan suatu subsemiring.

Kata kunci: semiring, hasil kali silang, level subset, subsemiring fuzzy

Received: 04 September 2023, Accepted: 30 Oktober 2023, Published: 1 Desember 2023

PENDAHULUAN

Konsep grup *fuzzy* pertama kali dikemukakan oleh Rosenfeld (1971). Ia menggabungkan teori grup dengan himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Dari penelitian ini, memberikan banyak ide bagi penelitian berikutnya, diantaranya Abdurrahman (2020a, 2022, 2023) mengkaji interior subgrup $\omega -$ *fuzzy*, $(\lambda, \mu] -$ subgrup *fuzzy*, dan hasil kali ideal semiring *fuzzy*; Abdurrahman, dkk. (2021) mengkaji operasi pada matriks yang elemen matriksnya pada interval tutup [0,1]; Dib, dkk. (1991) mengkaji produk kartesius, relasi *fuzzy* dan fungsi *fuzzy*; Ersoy, dkk. (2002) mengkaji produk kartesius ideal prima *fuzzy*, Hemabala, dkk.. (2020) mengkaji produk kartesius multi $L -$ ideal *fuzzy*, Sharma (2013) mengkaji $\alpha -$subgrup *fuzzy*, dan Yetkin, dkk. (2011) mengkaji hasil kali langsung grup *fuzzy* dan ring *fuzzy*.

Semiring *fuzzy* merupakan salah satu topik penelitian yang dimotivasi penelitian Rosenfeld (1971). Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring, dengan cara menghilangkan aksioma invers pada operasi pertama. Dengan tidak adanya aksioma invers pada struktur semiring, sehingga pada struktur semiring *fuzzy* memunculkan suatu masalah untuk nilai keanggotaan elemen identitas seperti yang disajikan pada penelitian Abdurrahman (2020[b], 2022a). Hal ini, yang memotivasi penulis untuk melakukan penelitian pada struktur semiring.

Penelitian yang kami lakukan termotivasi oleh penelitian Sharma (2013) dan Abdurrahman (2020c, 2020b, 2023), yaitu mengkaji hasil kali dari $\omega -$ subsemiring *fuzzy*. Sifat – sifat yang dihasilkan oleh Abdurrahman (2020b), merupakan dasar kami dalam mengkontruksi hasil kali silang $\omega -$ subsemiring *fuzzy*. Sifat yang akan dikaji pada paper ini, meliputi hasil kali silang dari dua (lebih) $\omega -$ subsemiring *fuzzy*. Selain itu, kami akan meyelidiki hasil kali silang dua (lebih) suatu level subset yang dikaitkan dengan hasil kali silang $\omega -$ subsemiring *fuzzy*.

TINJAUAN PUSTAKA

Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring, dengan menghilangkan aksioma invers pada operasi pertama. Menurut Ahsan et al (2012) dan Golan (2003), himpunan tak kosong $\mathcal{K}$ disebut semiring jika pada $\mathcal{K}$ dilengkapi dua operasi biner penjumlahan $" + "$ dan perkalian $" \cdot "$ sedemikian sehingga $(\mathcal{K}, +)$ adalah semigrup abelian dengan elemen netral $0_{\mathcal{K}}$, $(\mathcal{K}, \cdot)$ adalah semigrup (tidak harus komutatif), dan berlaku sifat distributif kiri dan kanan operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Mengingat semiring $\mathcal{K}$ memuat $0_{\mathcal{K}}$, maka dan $a \cdot 0_{\mathcal{K}} = 0_{\mathcal{K}} \cdot a = 0_{\mathcal{K}}$ untuk setiap $a \in \mathcal{K}$.

Selanjutnya, Zadeh (1965) mendefinisikan subset fuzzy sebagai suatu fungsi dari suatu himpunan tidak kosong X ke interval tutup $[0, 1]$. Koleksi dari semua subset *fuzzy* dari X, dinotasikan dengan $\mathcal{F}(X)$.

Definisi 2.1. (Mordeson & Bhutani, 2005) *Misalkan $\eta \in \mathcal{F}(X)$ dan $c \in [0, 1]$. Level subset dari η, dinotasikan η_c, yang didefinisikan oleh*

$$\eta_c \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid \eta(z) \geq c\}.$$

Berikut kami sajikan definisi hasil kali silang dari dua subset pada suatu himpunan tidak kosong, subsemiring *fuzzy*, dan $\omega -$ subsemiring *fuzzy*. Pada definisi hasil kali silang dua subset *fuzzy*, kami menggunakan notasi "$a \wedge b$", yang artinya nilai minimum dari a dan b.

Definisi 2.2. (Abdurrahman, 2023) *Misalkan $\eta, \sigma \in \mathcal{F}(X)$. Hasil kali silang dari η dan σ, dinotasikan $\eta \times \sigma$, yaitu $\eta \times \sigma(a, x) \overset{\text{def}}{=} \eta(a) \wedge \sigma(x)$ untuk setiap $(a, x) \in X \times X$.*

Definisi 2.3. (Ahsan et al., 2012) *Subset fuzzy η dari semiring $\mathcal{K}$ disebut subsemiring fuzzy dari $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika*

$$\eta(a+x) \geq \eta(a) \wedge \eta(x) \text{ dan } \eta(ax) \geq \eta(a) \wedge \eta(x)$$

untuk setiap $a, x \in \mathcal{K}$.

Definisi 2.4. (Abdurrahman, 2020a, 2020c) *Misalkan $\eta \in \mathcal{F}(X)$ dan $\omega \in [0,1]$. Didefinisikan suatu subset fuzzy η^ω dari X, yaitu $\eta^\omega(a) \stackrel{\text{def}}{=} \eta(a) \wedge \omega$ untuk setiap $a \in X$.*

Definisi 2.5. (Abdurrahman, 2020c) *Subset fuzzy η dari semiring $\mathcal{K}$ disebut $\omega -$ subsemiring fuzzy dari $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika η^ω adalah subsemiring fuzzy dari $\mathcal{K}$.*

METODE PENELITIAN

Penelitian yang kami laksanakan, merupakan kajian teori yang merujuk pada referensi terkait semiring, subset *fuzzy*, subsemiring *fuzzy*, hasil kali silang subset *fuzzy* ataupun referensi lainnya yang terkait dengan topik yang kami angkat. Untuk mengkaji sifat hasil kali silang $\omega -$ subsemiring *fuzzy* dan hasil kali silang dua (lebih) suatu level subset yang dikaitkan dengan hasil kali silang $\omega -$ subsemiring *fuzzy*, kami kontruksi sifat terkait dengan cara menginduksi dari penelitian Abdurrahman (2020b, 2023). Dari sifat yang kami buat, kami buktikan kevalidannya dengan mempertimbangkan asumsi ataupun definisi terkait yang disajikan pada bagian Tinjauan Pustaka.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini, diberikan karakterisasi hasil kali silang dari dua atau lebih $\omega -$ subsemiring *fuzzy* yang disajikan dalam bentuk proposisi ataupun akibat.

Proposisi 4.1. *Misalkan η dan σ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$, maka $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.*

Bukti:
Misalkan η dan σ adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring $\mathcal{K}$, berarti berdasarkan Definisi 2.3 dan Definisi 2.4, untuk setiap $(a,z),(c,w) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, dipenuhi kondisi berikut:

$$\begin{aligned}(\eta\times\sigma)^\omega[(a,z)+(c,w)] &= (\eta\times\sigma)^\omega[(a+c, z+w)]\\ &= \eta\times\sigma(a+c,z+w)\wedge\omega\\ &= \big(\eta(a+c)\wedge\sigma(z+w)\big)\wedge\omega\\ &\geq \big(\eta(a)\wedge\eta(c)\big)\wedge\big(\sigma(z)\wedge\sigma(w)\big)\wedge\omega\\ &= \big(\eta(a)\wedge\sigma(z)\big)\wedge\big(\eta(c)\wedge\sigma(w)\big)\wedge\omega\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \eta \times \sigma(a,z) \wedge \eta \times \sigma(c,w) \wedge \omega \\
&= (\eta \times \sigma(a,z) \wedge \omega) \wedge (\eta \times \sigma(c,w) \wedge \omega) \\
&= (\eta \times \sigma)^{\omega}(a,z) \wedge (\eta \times \sigma)^{\omega}(c,w)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
(\eta \times \sigma)^{\omega}[(a,z)(c,w)] \quad &= (\eta \times \sigma)^{\omega}[(ac,zw)] \\
&= \eta \times \sigma(ac,zw) \wedge \omega \\
&= \big(\eta(ac) \wedge \sigma(zw)\big) \wedge \omega \\
&\geq \big(\eta(a) \wedge \eta(c)\big) \wedge \big(\sigma(z) \wedge \sigma(w)\big) \wedge \omega \\
&= \big(\eta(a) \wedge \sigma(z)\big) \wedge \big(\eta(c) \wedge \sigma(w)\big) \wedge \omega \\
&= \eta \times \sigma(a,z) \wedge \eta \times \sigma(c,w) \wedge \omega \\
&= (\eta \times \sigma(a,z) \wedge \omega) \wedge (\eta \times \sigma(c,w) \wedge \omega) \\
&= (\eta \times \sigma)^{\omega}(a,z) \wedge (\eta \times \sigma)^{\omega}(c,w).
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\eta \times \sigma)^{\omega}$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Dengan kata lain, $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. ■

Kondisi η dan σ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$, pada Proposisi 4.1, mengakibatkan akan selalu berlaku $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Berdasarkan penelitian Abdurrahman (2020c), kebalikannya tidak selalu berlaku. Oleh karena itu, pada proposisi berikut diberikan syarat agar kebalikan dari Proposisi 4.1 akan berlaku.

Proposisi 4.2 *Diberikan semiring $\mathcal{K}$ dan $\eta, \sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$. Jika*

$$\bigwedge_{(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}} \eta \times \sigma(a,x) \geq \omega,$$

maka $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

Bukti:

Misalkan $\bigwedge_{(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}} \eta \times \sigma(a,x) \geq \omega$, berarti

$$\omega = \eta \times \sigma(a,x) \wedge \omega$$

untuk setiap $(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Oleh karena itu, untuk setiap $(a,x),(c,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dipenuhi kondisi:

$$
\begin{aligned}
(\eta \times \sigma)^{\omega}[(a,x) + (c,z)] \quad &= (\eta \times \sigma)^{\omega}[(a+c, z+w)] \\
&= \eta \times \sigma(a+c, z+w) \wedge \omega \\
&= \omega \\
&= \omega \wedge \omega \\
&= (\eta \times \sigma(a,x) \wedge \omega) \wedge (\eta \times \sigma(c,z) \wedge \omega) \\
&= (\eta \times \sigma)^{\omega}(a,z) \wedge (\eta \times \sigma)^{\omega}(c,w)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
(\eta \times \sigma)^{\omega}[(a,z)(c,w)] \quad &= (\eta \times \sigma)^{\omega}[(ac,zw)] \\
&= \eta \times \sigma(ac,zw) \wedge \omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega \\
&= \omega \wedge \omega \\
&= (\eta \times \sigma(a,x) \wedge \omega) \wedge (\eta \times \sigma(c,z) \wedge \omega) \\
&= (\eta \times \sigma)^{\omega}(a,z) \wedge (\eta \times \sigma)^{\omega}(c,w).
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\eta \times \sigma)^{\omega}$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Dengan kata lain, $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. ■

Proposisi 4.3. *Misalkan η dan σ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$, maka $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.*

Bukti:
Untuk membuktikan $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, berdasarkan Proposisi 4.1, cukup ditunjukkan $(\eta \times \sigma)^{\omega} = \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$. Selanjutnya, untuk setiap $(a,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, berlaku:

$$
\begin{aligned}
(\eta \times \sigma)^{\omega}(a,z) &= \eta \times \sigma(a,z) \wedge \omega \\
&= \eta(a) \wedge \sigma(z) \wedge \omega \\
&= (\eta(a) \wedge \omega) \wedge (\sigma(z) \wedge \omega) \\
&= \eta^{\omega}(a) \wedge \sigma^{\omega}(z) \\
&= \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(a,z).
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\eta \times \sigma)^{\omega} = \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$. ■

Berdasarkan kondisi Proposisi 4.3 dan Corollary 1 (Abdurrahman, 2023), kami perumum untuk n buah subsemiring *fuzzy* $\eta_1, \eta_2, \cdots$, dan η_n dari semiring $\mathcal{K}$ sedemikian sehingga

$$(\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n)^{\omega} = \eta_1^{\omega} \times \eta_2^{\omega} \times \cdots \times \eta_n^{\omega}.$$

adalah subsemiring *fuzzy* dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\,faktor}$, seperti yang disajikan pada akibat berikut ini.

Akibat 4.4. *Misalkan $\eta_1, \eta_2, \cdots$, dan η_n adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$, maka $\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\,faktor}$.*

Bukti:
Misalkan $\eta_1, \eta_2, \cdots$, dan η_n adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan $\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\,faktor}$. Untuk membuktikan $\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\,faktor}$, cukup dibuktikan $\eta_1^{\omega} \times \eta_2^{\omega} \times \cdots \times \eta_n^{\omega}$ adalah

subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\ faktor}$. Pembuktian, akan digunakan induksi matematika untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Untuk $\boldsymbol{n = 2}$, menurut Proposisi 4.3, diperoleh $\eta_1^\omega \times \eta_2^\omega$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

Untuk $\boldsymbol{n = k}$, diasumsikan $\eta_1^\omega \times \eta_2^\omega \times \cdots \times \eta_k^\omega$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{k\ faktor}$. Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$, $\eta_1^\omega \times \eta_2^\omega \times \cdots \times \eta_k^\omega \times \eta_{k+1}^\omega$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{k+1\ faktor}$. Mengingat $\eta_1^\omega \times \eta_2^\omega \times \cdots \times \eta_k^\omega$ dan η_{k+1}^ω berturut-turut adalah adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{k\ faktor}$ dan $\mathcal{K}$. Berdasarkan Proposisi 4.3, diperoleh $\eta_1^\omega \times \eta_2^\omega \times \cdots \times \eta_k^\omega \times \eta_{k+1}^\omega$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{k+1\ faktor}$.

Jadi, $\eta_1^\omega \times \eta_2^\omega \times \cdots \times \eta_n^\omega$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\ faktor}$.
Dengan kata lain, $\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\ faktor}$. ■

Proposisi 4.5. *Misalkan η dan σ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$ maka $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ jika dan hanya jika level subset tak kosong $(\eta^\omega \times \sigma^\omega)_s$ adalah subsemiring dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, untuk setiap $s \in [0, 1]$.*

Bukti:
Misalkan $\eta \times \sigma$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, berarti menurut Proposisi 4.3, $\eta^\omega \times \sigma^\omega$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Oleh karena itu, untuk setiap $(a, x), (c, z) \in (\eta^\omega \times \sigma^\omega)_s$ dipenuhi kondisi

$$\eta^\omega \times \sigma^\omega(a, x) \geq s \text{ dan } \eta^\omega \times \sigma^\omega(c, z) \geq s.$$

Akibatnya,

$$\eta^\omega \times \sigma^\omega[(a, x) + (c, z)] \geq \eta^\omega \times \sigma^\omega(a, x) \wedge \eta^\omega \times \sigma^\omega(c, z) \geq s$$

dan

$$\eta^\omega \times \sigma^\omega[(a, x)(c, z)] \geq \eta^\omega \times \sigma^\omega(a, x) \wedge \eta^\omega \times \sigma^\omega(c, z) \geq s$$

Oleh karena itu,

$$(a, x) + (c, z) \in (\eta^\omega \times \sigma^\omega)_s \text{ dan } (a, x)(c, z) \in (\eta^\omega \times \sigma^\omega)_s.$$

Dengan kata lain, level subset $(\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_s$ adalah subsemiring dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, untuk setiap $s \in [0,1]$. Sebaliknya, diambil sebarang $(a,x),(c,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Mengingat $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$ adalah subset fuzzy dari $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, berarti terdapat $s_1, s_2 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(a,x) = s_1$ dan $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(c,z) = s_2$. Misalkan $s_0 = s_1 \wedge s_2$. Akibatnya,

$$\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(a,x) \geq s_0 \text{ dan } \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(c,z) \geq s_0.$$

Dengan kata lain,

$$(a,x) \in (\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_{s_0} \text{ dan } (c,z) \in (\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_{s_0}.$$

Mengingat, $(\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_s$ adalah subsemiring dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, untuk setiap $s \in [0,1]$, berarti dipenuhi kondisi

$$(a,x) + (c,z) \in (\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_{s_0} \text{ dan } (a,x)(c,z) \in (\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_{s_0}.$$

Oleh karena itu,

$$\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}[(a,x) + (c,z)] \geq s_0 = \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(a,x) \wedge \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(c,z)$$

dan

$$\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}[(a,x)(c,z)] \geq s_0 = \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(a,x) \wedge \eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}(c,z).$$

Jadi, $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. ∎

Berdasarkan Kondisi Proposisi 4.5, kami perumum untuk subsemiring fuzzy η_1, η_2, $\cdots$, dan η_n dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\, faktor}$, seperti disajikan pada Akibat 4.6.

Akibat 4.6. *Misalkan $\eta_1, \eta_2, \cdots$, dan η_n adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$ maka $\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n$ adalah $\omega-$ subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\, faktor}$ jika dan hanya jika level subset tak kosong $(\eta_1^{\omega} \times \eta_2^{\omega} \times \cdots \times \eta_n^{\omega})_s$ adalah subsemiring dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\, faktor}$, untuk setiap $s \in [0,1]$.*

Proposisi 4.7. *Misalkan η dan σ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K}$ maka $\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega}$ adalah subsemiring fuzzy dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ jika dan hanya jika level subset tak kosong $(\eta^{\omega})_s \times (\sigma^{\omega})_s$ adalah subsemiring dari semiring $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, untuk setiap $s \in [0,1]$.*

Bukti:
Untuk membuktikan kevalidan Proposisi 4.7, dengan menggunakan Proposisi 4.5 cukup dibuktikan bahwa

$$(\eta^{\omega} \times \sigma^{\omega})_s = (\eta^{\omega})_s \times (\sigma^{\omega})_s.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}(\eta^\omega \times \sigma^\omega)_s &= \{(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid \eta^\omega \times \sigma^\omega(a,x) \geq s\}\\ &= \{(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid \eta^\omega(a) \wedge \sigma^\omega(x) \geq s\}\\ &= \{(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid \eta^\omega(a) \geq s, \sigma^\omega(x) \geq s\}\\ &= \{(a,x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid a \in (\eta^\omega)_s, x \in (\sigma^\omega)_s\}\\ &= (\eta^\omega)_s \times (\sigma^\omega)_s. \blacksquare\end{aligned}$$

Analog dengan kondisi Akibat 4.6, diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 4.8. *Misalkan η_1, η_2, $\cdots$, dan η_n adalah subsemiring fuzzy dari$\mathcal{K}$ maka $\eta_1 \times \eta_2 \times \cdots \times \eta_n$ adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\ faktor}$ jika dan hanya jika level subset tak kosong $(\eta_1^\omega)_s \times (\eta_2^\omega)_s \times \cdots \times (\eta_n^\omega)_s$ adalah subsemiring dari semiring $\underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \cdots \times \mathcal{K}}_{n\ faktor}$, untuk setiap $s \in [0,1]$.*

KESIMPULAN

Simpulan yang dihasilkan dari pembahasan adalah hasil kali silang dari dua atau lebih $\omega -$ subsemiring fuzzy adalah $\omega -$ subsemiring fuzzy. Selain itu, hasil kali silang dari dua atau lebih $\omega -$ subsemiring fuzzy menetukan terbentuknya hasil kali silang dua atau lebih suatu level subset merupakan suatu subsemiring.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih kepada Universitas Lambung Mangkurat yang telah mendanai penelitian ini No. SP DIPA – 023.17.2.6777518/2023.

REFERENSI

Abdurrahman, S. (2020a). Interior subgrup ω-fuzzy. *Fibonacci : Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*. Vol. 6(2), 91–98. https://doi.org/https://doi.org/10.24853/fbc.6.2.91-98

Abdurrahman, S. (2020b). Karakteristik subsemiring fuzzy. *Jurnal Fourier*. Vol. 9(1), 19–23. https://doi.org/10.14421/fourier.2020.91.19-23

Abdurrahman, S. (2020c). ω – fuzzy subsemiring.pdf. *Jurnal Matematika, Sains, Dan* Teknologi. Vol. 21(1), 1–10. https://doi.org/https://doi.org/10.33830/jmst.v21i1.673.2020

Abdurrahman, S. (2022a). Homomorphisms and (λ, μ] – Fuzzy subgroup. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2577(1), 20001. https://doi.org/10.1063/5.0096015

Abdurrahman, S. (2022b). Ideal Fuzzy Semiring Atas Level Subset. *Jurnal Fourier*. Vol. 11(1), 1–6. https://doi.org/10.14421/fourier.2022.111.1-6

Abdurrahman, S. (2023). Cross product of ideal fuzzy semiring. *Barekeng: Journal* *of Mathematics and Its Application*. Vol. 17(2).

Abdurrahman, S., Thresye, Lula, R. R., Rachman, R. A., & Evina, Y. (2021). Subtraction of soft matrices. *Journal of Physics: Conference Series*. 2106(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/2106/1/012028

Ahsan, J., Mordeson, J. N., & Shabir, M. (2012). Fundamental Concepts. In *Fuzzy Semirings with Applications to Automata Theory*. 3–13. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-27641-5_1

Dib, K. A., & Youssef, N. L. (1991). Fuzzy cartesian product, fuzzy relations and fuzzy functions. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 41(3), 299–315. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90134-C

Ersoy, B., A, T., & I, D. (2002). Cartesian Product on Fuzzy Prime Ideals. *Journal of Applied Sciences*. Vol. 2(11), 1022–1024. https://doi.org/10.3923/jas.2002.1022.1024

Golan, J. S. (2003). Semirings. In *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications*. 1–26. Kluwer Academic Publishers.

Hemabala, K., & Kumar, S. (2020). Cartesian product of multi L-fuzzy ideals of Γ-near ring. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*. Vol. 9, 5273–5281. https://doi.org/10.37418/amsj.9.7.96

Mordeson, J., & Bhutani, K. R. (2005). Fuzzy Subsets and Fuzzy Subgroups. In *Group Issue X*. Vol. 39, 1–39). https://doi.org/10.1007/10936443_1

Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 35(3), 512–517. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90199-5

Sharma, P. K. (2013). Alpha - Fuzzy Subgroups. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*. Vol. 3(1), 47–59.

Yetkin Çelikel, E., & Olgun, N. (2011). Direct product of fuzzy groups and fuzzy rings. *International Mathematical Forum*.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, *8*(3), 338–353. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X