Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.17 No.1 (Juni 2023) Hal. 76-90

BILANGAN KROMATIK *EQUITABLE* PADA GRAF BINTANG, GRAF LOLIPOP, DAN GRAF PERSAHABATAN

Yuda Praja, Fransiskus Fran, Nilamsari Kusumastuti

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura Pontianak
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, 78124, Kalimantan Barat
email: *yudapraja1203@student.untan.ac.id*

ABSTRACT

Let G be a connected and undirected graph. Vertex coloring in a graph G is a mapping from the set of vertices in G to the set of colors such that every two adjacent vertices have different colors. There are many types of vertex coloring, such as complete coloring, k-differential coloring, and equitable coloring. Equitable coloring of G is a vertex coloring of G that satisfies the condition that for each induced color class it has an equitable cardinality with difference 0 or 1. The minimum number of colors used for such coloring of G is called the equitable chromatic number of G, denoted by $\chi_e(G)$. In this study, we only concern with graphs that have a central vertex, which means a vertex that is adjacent to every other vertex, in particular on the star graph (S_n), lollipop graph (L_n), and friendship graph (f_n). This research aims to formulate the equitable chromatic number of the star graph (S_n), lollipop graph (L_n), and friendship graph (f_n). The first step taken in this research is to apply vertex coloring to S_n, L_n, and f_n. After that, the color classes of the vertex set are obtained and its cardinality is determined. Next, analyze that the applied vertex coloring meets the definition of equitable coloring. Then, prove that the number of colors used is minimum. Thus, the chromatic number for each graph is obtained and proved. Based on this research, the equitable chromatic number of S_n is $\lceil n/2 \rceil + 1$, the equitable chromatic number of L_n is n, and the equitable chromatic number of f_n is 3, for $n = 1$ and $n + 1$, for $n \geq 2$.

Keywords: vertex coloring, color class, cardinality

ABSTRAK

Diberikan sebarang graf G yang terhubung dan tak berarah. Pewarnaan simpul pada graf G adalah pemetaan dari himpunan simpul pada graf G ke himpunan warna sedemikian sehingga untuk setiap dua simpul yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Salah satu pengembangan dari konsep pewarnaan simpul adalah pewarnaan *equitable*. Pewarnaan *equitable* dari graf G adalah pewarnaan simpul graf G yang memenuhi syarat bahwa untuk setiap kelas warna yang diinduksi memiliki kardinalitas yang merata dengan beda 0 atau 1. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan *equitable* pada graf G disebut bilangan kromatik *equitable* G, yang dinotasikan dengan $\chi_e(G)$. Penggunaan graf pada penelitian ini dibatasi oleh graf yang memiliki simpul pusat, yaitu satu simpul yang bertetangga dengan setiap simpul lainnya, seperti graf bintang (S_n), graf lolipop (L_n), graf persahabatan (f_n). Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan bilangan kromatik *equitable* pada graf bintang (S_n), graf lolipop (L_n), graf persahabatan (f_n). Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menerapkan pewarnaan simpul pada S_n, L_n, dan f_n. Setelah itu, diperoleh kelas warna pada himpunan simpul dan ditentukan kardinalitasnya. Selanjutnya menganalisis bahwa pewarnaan simpul yang diterapkan memenuhi definisi pewarnaan *equitable*. Kemudian, membuktikan bahwa banyaknya warna yang digunakan adalah minimum.

Sehingga diperoleh bilangan kromatik untuk masing-masing graf dan dibuktikan kebenarannya. Berdasarkan penelitian ini, diperoleh bilangan kromatik *equitable* S_n adalah $\lceil n/2 \rceil + 1$, bilangan kromatik *equitable* L_n adalah n, dan bilangan kromatik *equitable* f_n adalah 3, untuk $n = 1$ dan $n + 1$, untuk $n \geq 2$.

Kata kunci: pewarnaan simpul, kelas warna, kardinalitas

Received: 28 Mei 2023, Accepted: 19 Juni 2023, Published: 21 Juni 2023

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang menggambarkan objek-objek diskrit dinyatakan dengan simpul dan hubungan antara objek tersebut dinyatakan dengan sisi (Harary, 1994). Salah satu pembahasan dalam teori graf yang hingga kini masih menjadi topik yang sering dikaji yaitu tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf G merupakan pemetaan dari himpunan simpul maupun sisi pada graf G ke himpunan warna, sehingga setiap simpul atau sisi yang bertetangga di graf G memiliki warna yang berbeda. Terdapat beberapa permasalahan yang dapat diselesaikan dengan pewarnaan graf, diantaranya pemecahan masalah dalam penjadwalan kuliah, pembagian kerja, dan pewarnaan peta.

Pewarnaan simpul pada graf G adalah pemetaan dari himpunan simpul pada graf G ke himpunan warna sedemikian sehingga untuk setiap dua simpul yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan simpul pada graf G disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Munir, 2010). Salah satu pengembangan dari konsep pewarnaan graf adalah pewarnaan *equitable*.

Menurut Chen & Lih (1994), konsep pewarnaan *equitable* pertama kali diperkenalkan oleh Meyer pada tahun 1973. Salah satu penerapan dari pewarnaan *equitable* yaitu pewarnaan pada peta secara merata. Kemudian menurut Blum, dkk (2003), jika $G = (V, E)$ adalah sebarang graf terhubung dan tak berarah, maka pewarnaan simpul graf G menginduksi kelas warna pada himpunan simpul di G. Kelas warna k_i, $i \in \mathbb{N}$ terdiri dari simpul-simpul yang diwarnai dengan warna i. Diketahui bahwa $|k_i|$ merupakan kardinalitas dari kelas warna ke-i. Pewarnaan *equitable* dari graf G adalah pewarnaan simpul graf G yang memenuhi $\big||k_i| - |k_j|\big| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$, dengan n adalah banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan *equitable*. Bilangan kromatik *equitable* G, yang dinotasikan dengan $\chi_e(G)$ menyatakan minimum banyaknya warna yang diterapkan untuk pewarnaan *equitable* pada graf G.

Saat ini, bilangan kromatik *equitable* masih dalam proses pengembangan teori, sehingga materi ini menarik untuk diteliti lebih lanjut. Penggunaan graf pada penelitian ini difokuskan pada graf yang memiliki simpul pusat. Simpul pusat merupakan simpul yang tertetangga dengan setiap simpul lainnya pada suatu graf. Contoh graf yang memiliki simpul pusat meliputi graf bintang, graf lolipop, dan graf persahabatan. Graf bintang S_n adalah graf yang memiliki $n+1$ simpul, dengan salah satu simpul berderajat n yang dinamakan dengan simpul pusat dengan $n \in \mathbb{N}$, dan n simpul lainnya yang berderajat 1 disebut daun (Irawati, 2013). Graf lolipop L_n merupakan graf yang diperoleh dengan menggabungkan sebuah graf lengkap K_n ke sebuah graf lintasan P_1 dengan sebuah jembatan (Umam, 2021). Sedangkan graf persahabatan f_n dengan $2n+1$ simpul adalah suatu graf yang terdiri dari graf C_3 sebanyak n yang bertemu di simpul pusat (Mertzios & Unger, 2008). Pada penelitian ini masalah yang dibahas adalah merumuskan bilangan kromatik *equitable* pada graf bintang, graf lolipop, dan graf persahabatan.

TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian tentang bilangan kromatik *equitable* pada beberapa graf dikaji dengan sistem studi pustaka. Setelah dilakukan kajian terhadap beberapa penelitian, terdapat buku dan artikel yang mendasari penelitian ini. Penelitian pertama yang digunakan untuk mengkaji tentang bilangan kromatik *equitable* adalah penelitian oleh Blum, dkk (2003) yang membahas tentang bilangan kromatik *equitable* pada graf multipartit lengkap. Dalam penelitian tersebut, terdapat definisi pewarnaan *equitable* untuk menentukan bilangan kromatik *equitable*. Berikut diberikan definisi mengenai pewarnaan *equitable* yang dijelaskan pada Definisi 1.

Definisi 1. (Blum, Torrey, & Hammack, 2003) *Pewarnaan simpul graf G membentuk kelas warna k_i, dengan $i \in \mathbb{N}$ terdiri dari simpul-simpul yang diwarnai dengan warna i pada himpunan simpul di G. Pewarnaan equitable dari graf G adalah pewarnaan simpul graf G yang memenuhi $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \le i, j \le n$, dengan n adalah banyaknya warna yang digunakan.*

Dalam pewarnaan *equitable* dikenal juga dengan istilah bilangan kromatik *equitable*. Berikut diberikan Definisi 2 untuk menjelaskan tentang bilangan kromatik *equitable*.

Definisi 2. (Blum, Torrey, & Hammack, 2003) *Bilangan kromatik equitable dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_e(G)$ adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan equitable pada graf G.*

Selanjutnya artikel yang ditulis oleh Lam, dkk (2001) yang membahas tentang bilangan kromatik *equitable* pada graf n-partit lengkap. Dalam penelitian tersebut, diperoleh sebuah rumusan bilangan kromatik *equitable* pada graf n-partit lengkap $K_{p_1,p_2,\ldots,p_n}$. Jika M adalah bilangan bulat terbesar, dengan $p_i (mod\ M) < \left\lceil \frac{p_i}{M} \right\rceil$, $i = 1,2,\ldots,n$, maka $\chi_e\left(K_{p_1,p_2,\ldots,p_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{p_i}{M+1} \right\rceil$.

Kemudian penelitian yang dilakukan oleh Furmanczyk (2006) membahas tentang pewarnaan *equitable* pada beberapa operasi graf. Dalam penelitian tersebut diperoleh rumusan bilangan kromatik *equitable* untuk graf $K_{1,m} \times P_n$ adalah $\chi_e(K_{1,m} \times P_n) = 3$, dengan $m, n \geq 3$ dan n ganjil, sedangkan untuk graf $K_{1,m} \otimes P_n$ dengan $n \geq 2$ diperoleh $\chi_e(K_{1,m} \otimes P_n) = 2$ untuk $m = 1$, n genap dan $\chi_e(K_{1,m} \otimes P_n) = 3$ untuk m, n lainnya.

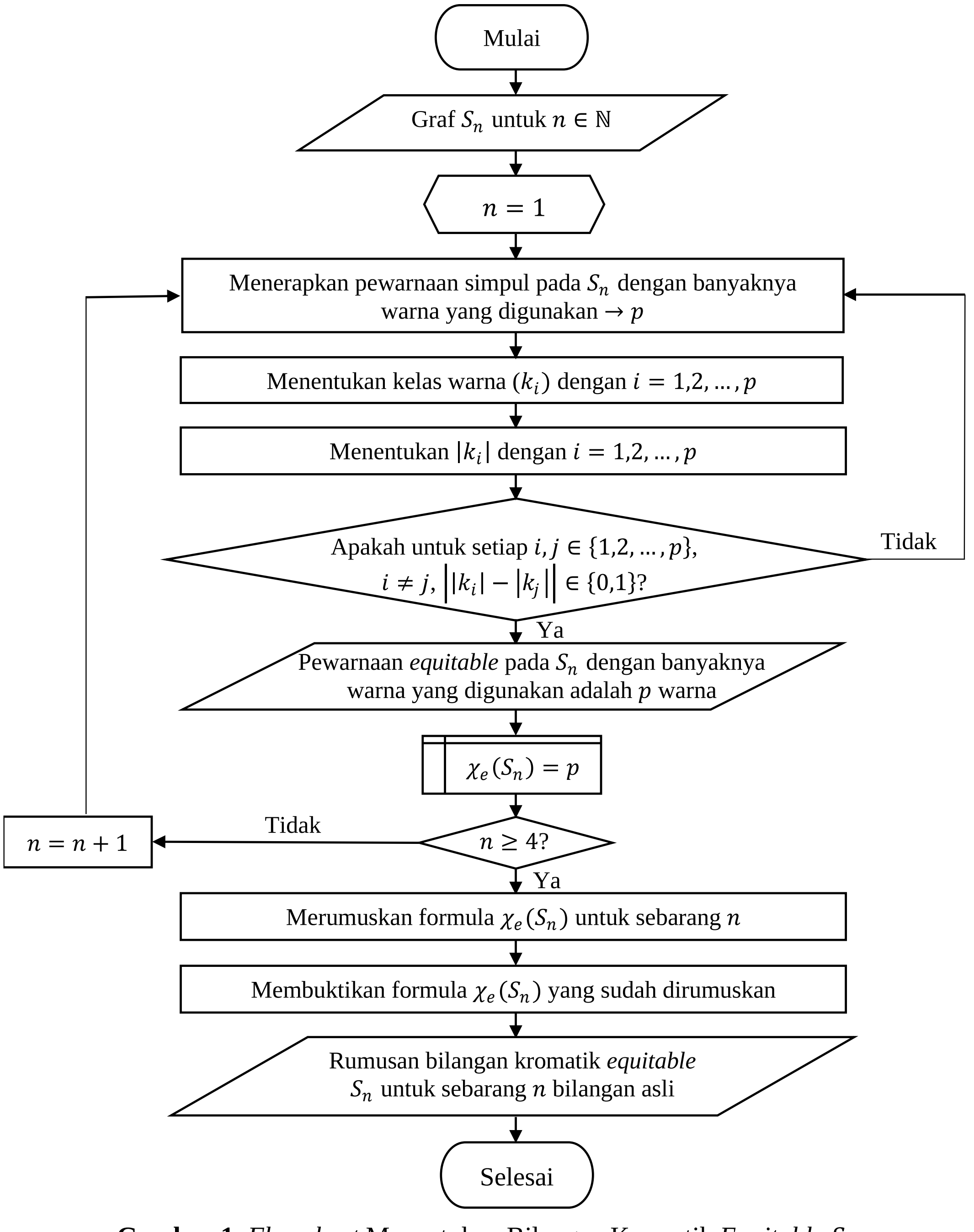
Kajian penelitian selanjutnya yaitu penelitian yang ditulis oleh Anitha & Arumugam (2010) yang membahas tentang derajat bilangan kromatik *equitable* pada sebuah graf. Dalam penelitian tersebut membahas tentang derajat bilangan kromatik *equitable*. Misalkan G adalah sebarang graf terhubung dan tak berarah. Subhimpunan S dari $V(G)$ disebut himpunan derajat *equitable* jika derajat setiap dua simpul di S berbeda paling banyak 1. Kardinalitas dengan minimum banyaknya dari partisi $V(G)$ yang terbentuk disebut derajat bilangan kromatik *equitable* dari G, yang dinotasikan dengan $\chi_{de}(G)$.

Kemudian pada tahun 2012, penelitian yang dilakukan oleh Gang & Ming membahas tentang bilangan kromatik total *equitable* pada beberapa graf yang diperoleh dari hasil operasi join. Bilangan kromatik total *equitable* merupakan pengembangan dari bilangan kromatik *equitable*. Dalam penelitian tersebut diperoleh rumusan bilangan kromatik total *equitable* pada beberapa graf yang diperoleh dari hasil operasi join. Pada graf $P_m + S_n$, dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 1$ diperoleh $\chi_{et}(P_m + S_n) = 5$ untuk $m = 2, n = 1$ dan $\chi_{et}(P_m + S_n) = m + n + 1$ untuk m, n lainnya. Pada graf $P_m + F_n$, dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ diperoleh $\chi_{et}(P_m + F_n) = 7$ untuk $m, n = 1,2, m \neq n$ dan $\chi_{et}(P_m + F_n) = m + n + 1$ untuk m, n lainnya. Sedangkan pada graf $P_m + W_n$, dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_{et}(P_m + S_n) = 7$ untuk $m = 2, n = 3$ dan $\chi_{et}(P_m + S_n) = m + n + 1$ untuk m, n lainnya.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan membaca literatur yang berhubungan dengan bilangan kromatik *equitable*. Literatur tersebut bersumber dari buku, artikel pada jurnal, dan penelusuran melalui internet. Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menetapkan graf yang akan dibahas. Penggunaan graf pada penelitian ini difokuskan pada graf yang memiliki simpul pusat, yaitu satu simpul yang bertetangga dengan setiap simpul lainnya, seperti graf bintang, graf lolipop, dan graf persahabatan. Setelah menetapkan graf, kemudian menerapkan pewarnaan simpul pada S_n, L_n, dan f_n. Dari pewarnaan simpul yang telah diterapkan, diperoleh kelas warna k_i, $i \in \mathbb{N}$. Setelah itu, mencari kardinalitas pada setiap kelas warna. Selanjutnya menganalisis bahwa pewarnaan simpul yang diterapkan memenuhi definisi pewarnaan *equitable*. Jika tidak memenuhi, maka peneliti kembali menerapkan pewarnaan simpul pada S_n, L_n, dan f_n. Jika memenuhi, maka lanjut ke tahap berikutnya. Tahap selanjutnya adalah membuktikan bahwa banyaknya warna yang digunakan adalah minimum.

Sehingga diperoleh $\chi_e(S_n)$, $\chi_e(L_n)$, dan $\chi_e(f_n)$ dan dibuktikan kebenarannya. Proses untuk mendapatkan rumusan bilangan kromatik *equitable* L_n dan f_n kurang lebih sama seperti langkah-langkah untuk mendapatkan rumusan bilangan kromatik *equitable* pada S_n. Secara detail tanpa mengurangi keumuman, *flowchart* untuk menentukan bilangan kromatik *equitable* pada graf S_n disajikan pada Gambar 1.

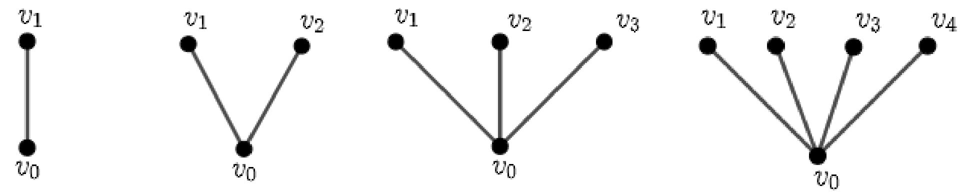


Gambar 1. *Flowchart* Menentukan Bilangan Kromatik *Equitable* S_n

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan Kromatik *Equitable* pada Graf Bintang S_n

Bilangan kromatik *equitable* pada graf bintang S_n dapat ditentukan dengan mewarnai graf bintang S_n sesuai dengan definisi pewarnaan *equitable*. Karakteristik yang dimiliki oleh graf bintang dengan $n + 1$ simpul yaitu salah satu simpulnya v_0 berperan sebagai simpul pusat yang berderajat n dan untuk n simpul lainnya berderajat 1. Artinya, $(v_0, v_i) \in E(S_n)$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Berikut diberikan graf bintang S_1, S_2, S_3, dan S_4 yang diilustrasikan pada Gambar 2.



(i) (ii) (iii) (iv)

Gambar 2. (i) Graf S_1; (ii) Graf S_2; (iii) Graf S_3; (iv) Graf S_4

Untuk $n = 1$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada S_1 seperti pada Gambar 2 (i). Diketahui $V(S_1) = \{v_0, v_1\}$ dengan $|V(S_1)| = 2$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf S_1. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(S_1)$ yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Kelas Warna dari $V(S_1)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1\}$	1

Dari Tabel 1, dapat dilihat bahwa perwarnaan pada graf S_1 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \le i, j \le 2$. Sehingga diperoleh $\chi_e(S_1) = 2$.

Selanjutnya untuk $n = 2$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada S_2 seperti pada Gambar 2 (ii). Diketahui $V(S_2) = \{v_0, v_1, v_2\}$ dengan $|V(S_2)| = 3$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf S_2. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(S_2)$ yang dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Kelas Warna dari $V(S_2)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1, v_2\}$	2

Dari Tabel 2, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf S_2 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \le i, j \le 2$. Sehingga diperoleh $\chi_e(S_2) = 2$.

Kemudian untuk $n = 3$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada S_3 seperti pada Gambar 2 (iii). Diketahui $V(S_3) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dengan $|V(S_3)| = 4$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf S_3. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(S_3)$ yang dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Kelas Warna dari $V(S_3)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1, v_2\}$	2
3	$\{v_3\}$	1

Dari Tabel 3, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf S_3 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 3$. Sehingga diperoleh $\chi_e(S_3) = 3$.

Berikutnya untuk $n = 4$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada S_4 seperti pada Gambar 2 (iv). Diketahui $V(S_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dengan $|V(S_4)| = 5$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf S_4. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(S_4)$ yang dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Kelas Warna dari $V(S_4)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1, v_2\}$	2
3	$\{v_3, v_4\}$	2

Dari Tabel 4, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf S_4 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 3$. Sehingga diperoleh $\chi_e(S_4) = 3$.

Setelah diperoleh bilangan kromatik *equitable* pada graf bintang S_1, S_2, S_3, dan S_4, maka terbentuklah sebuah pola bilangan kromatik *equitable* S_n yang tersaji pada Tabel 5. Berdasarkan pola yang diperoleh pada Tabel 5, maka terbentuklah Teorema 3.

Tabel 5. Pola Bilangan Kromatik *Equitable* Graf S_n

i	$\chi_e(S_i)$
1	2
2	2
3	3
4	3
5	4
6	4
$\vdots$	$\vdots$
n	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$

Teorema 3. *Jika S_n adalah graf bintang dengan simpul sebanyak $n+1$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka*

$$\chi_e(S_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

Bukti:

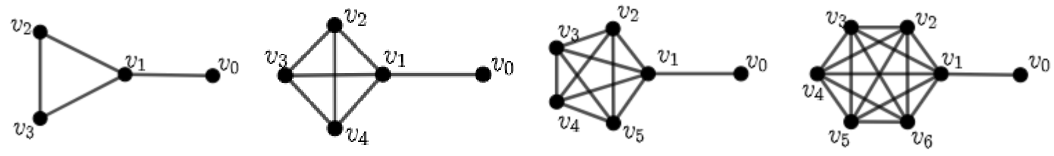
Diketahui S_n adalah graf bintang yang memiliki $V(S_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan $|V(S_n)| = n+1$. Akan dibuktikan bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan *equitable* adalah $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ atau $\chi_e(S_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. Karakteristik yang dimiliki oleh graf bintang dengan $n+1$ simpul yaitu salah satu simpulnya v_0 berperan sebagai simpul pusat yang berderajat n. Kemudian untuk n simpul lainnya berderajat 1. Misalkan v_0 diwarnai dengan warna 1, sehingga diperoleh $|k_1| = 1$ dengan $k_1 = \{v_0\}$. Karena $(v_0, v_j) \in E(S_n)$ untuk setiap $j = 1,2, \dots, n$, akibatnya v_j harus diwarnai dengan warna selain 1. Kemudian sesuai dengan definisi pewarnaan *equitable*, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $i \neq 1$ haruslah $|k_i| \leq 2$. Sehingga diperoleh $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ warna yang digunakan, dengan $\left|k_{\frac{n+1}{2}}\right| = 1$ ketika n ganjil dan $\left|k_{\frac{n}{2}}\right| = 2$ ketika n genap. Jadi, keseluruhan banyaknya warna yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$.

Selanjutnya, menunjukkan bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. Andaikan banyaknya warna yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ warna. Jika v_0 diwarnai dengan warna 1, maka terdapat sebanyak n simpul yang belum diwarnai dan banyaknya warna yang belum diterapkan adalah $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ warna. Dengan menggunakan prinsip sarang merpati yang dirampatkan (Munir, 2010), didapat sebarang k_i dengan kardinalitas lebih dari 2, dikarenakan untuk n ganjil, $n > 1$ diperoleh $\left\lceil \frac{n}{\frac{n+1}{2} - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\frac{n-1}{2}} \right\rceil = 3$ dan untuk n genap, $n > 2$ diperoleh $\left\lceil \frac{n}{\frac{n}{2} - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\frac{n-2}{2}} \right\rceil = 3$. Akibatnya terdapat tiga simpul yang diwarnai dengan warna yang sama. Hal ini bertentangan dengan pernyataan awal bahwa untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $i \neq 1$ haruslah $|k_i| \leq 2$, sehingga pengandaian salah. Jadi benar bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ warna, sehingga diperoleh bahwa $\chi_e(S_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. ■

Bilangan Kromatik *Equitable* pada Graf Lolipop $L_n, n \geq 3$

Bilangan kromatik *equitable* pada graf lolipop L_n dapat ditentukan dengan mewarnai graf lolipop L_n sesuai dengan definisi pewarnaan *equitable*. Karakteristik yang dimiliki oleh graf lolipop dengan $n+1$ simpul yaitu salah satu simpulnya v_0 berderajat 1, artinya $(v_0, v_1) \in E(L_n)$. Kemudian salah satu simpulnya v_1

berderajat n simpul dan $n-1$ simpul lainnya berderajat $n-1$, artinya $(v_i, v_j) \in E(L_n)$ untuk setiap $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$. Berikut diberikan graf bintang L_3, L_4, L_5, dan L_6 yang diilustrasikan pada Gambar 3.



(i) (ii) (iii) (iv)

Gambar 3. (i) Graf L_3; (ii) Graf L_4; (iii) Graf L_5; (iv) Graf L_6

Untuk $n = 3$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada L_3 seperti pada Gambar 3 (i). Diketahui $V(L_3) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ dengan $|V(L_3)| = 4$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf L_3. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(L_3)$ yang dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Kelas Warna dari $V(L_3)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_1\}$	1
2	$\{v_2\}$	1
3	$\{v_3, v_0\}$	2

Dari Tabel 6, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf L_3 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left| |k_i| - |k_j| \right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 3$. Sehingga diperoleh $\chi_e(L_3) = 3$.

Selanjutnya untuk $n = 4$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada L_4 seperti pada Gambar 3 (ii). Diketahui $V(L_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dengan $|V(L_4)| = 5$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf L_4. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(L_4)$ yang dapat dilihat pada Tabel 7.

Tabel 7. Kelas Warna dari $V(L_4)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_1\}$	1
2	$\{v_2\}$	1
3	$\{v_3\}$	1
4	$\{v_4, v_0\}$	2

Dari Tabel 7, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf L_4 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left| |k_i| - |k_j| \right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 4$. Sehingga diperoleh $\chi_e(L_4) = 4$.

Kemudian untuk $n = 5$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada L_5 seperti pada Gambar 3 (iii). Diketahui $V(L_5) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dengan $|V(L_5)| = 6$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf L_5. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(L_5)$ yang dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8. Kelas Warna dari $V(L_5)$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\lvert k_i \rvert}$
1	$\{v_1\}$	1
2	$\{v_2\}$	1
3	$\{v_3\}$	1
4	$\{v_4\}$	1
5	$\{v_5, v_0\}$	2

Dari Tabel 8, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf L_5 memenuhi Definisi 1, yaitu $\big||k_i| - |k_j|\big| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 5$. Sehingga diperoleh $\chi_e(L_5) = 5$.

Berikutnya untuk $n = 6$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada L_6 seperti pada Gambar 3 (iv). Diketahui $V(L_6) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dengan $|V(L_6)| = 7$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf L_6. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(L_6)$ yang dapat dilihat pada Tabel 9.

Tabel 9. Kelas Warna dari $V(L_6)$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\lvert k_i \rvert}$
1	$\{v_1\}$	1
2	$\{v_2\}$	1
3	$\{v_3\}$	1
4	$\{v_4\}$	1
5	$\{v_5\}$	1
6	$\{v_6, v_0\}$	2

Dari Tabel 9, dapat dilihat bahwa pewarnaan pada graf L_6 memenuhi Definisi 1, yaitu $\big||k_i| - |k_j|\big| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 6$. Sehingga diperoleh $\chi_e(L_6) = 6$.

Setelah diperoleh bilangan kromatik *equitable* pada graf lolipop L_3, L_4, L_5, dan L_6, maka terbentuklah sebuah pola bilangan kromatik *equitable* L_n dengan $n \geq 3$ yang tersaji pada Tabel 10. Berdasarkan pola yang diperoleh pada Tabel 10, maka terbentuklah Teorema 4.

Tabel 10. Pola Bilangan Kromatik *Equitable* Graf L_n

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{\chi_e(L_i)}$
3	3
4	4
5	5
6	6
$\vdots$	$\vdots$
n	n

Teorema 4. *Jika* L_n, $n \geq 3$ *adalah graf lolipop dengan simpul sebanyak* $n + 1$ *untuk* $n \in \mathbb{N}$, *maka*

$$\chi_e(L_n) = n$$

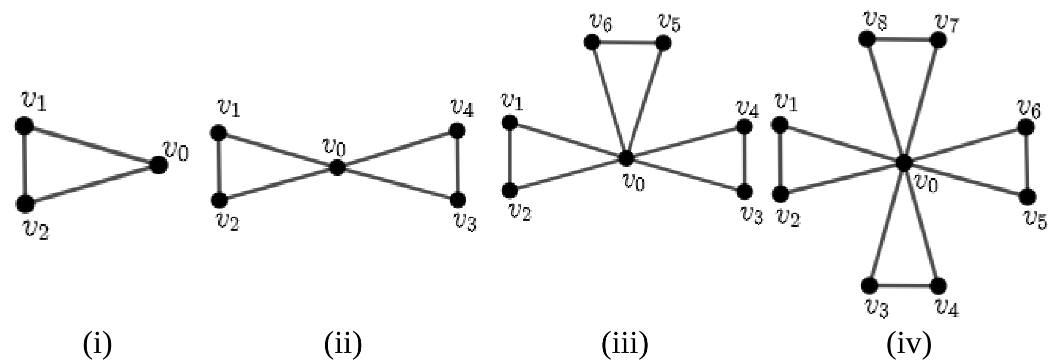
Bukti:

Diketahui L_n adalah graf lolipop yang memiliki $V(L_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan $|V(L_n)| = n + 1$. Akan dibuktikan bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan *equitable* adalah n atau $\chi_e(S_n) = n$. Karakteristik yang dimiliki oleh graf lolipop dengan $n + 1$ simpul yaitu salah satu simpulnya v_0 berderajat 1, artinya $(v_0, v_1) \in E(L_n)$. Kemudian, untuk simpul v_1 berderajat n dan $n - 1$ simpul lainnya berderajat $n - 1$, artinya $(v_i, v_j) \in E(L_n)$ untuk setiap $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Misalkan v_1 diwarnai dengan warna 1, sehingga diperoleh $|k_1| = 1$ dengan $k_1 = \{v_1\}$. Karena $(v_i, v_j) \in E(L_n)$ untuk setiap $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$, $i \neq j$, akibatnya untuk n simpul lainnya harus diwarnai dengan warna selain 1. Selanjutnya karena $(v_0, v_1) \in E(L_n)$, maka haruslah simpul v_0 diwarnai dengan warna selain 1. Kemudian sesuai dengan definisi pewarnaan *equitable*, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $i \neq 1$ haruslah $|k_i| \leq 2$, sehingga diperoleh $n - 1$ warna yang digunakan. Jadi keseluruhan banyaknya warna yang digunakan adalah $n - 1 + 1$ warna atau n warna.

Kemudian, menunjukkan bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan adalah n. Andaikan banyaknya warna yang digunakan adalah $n - 1$ warna. Karakteristik yang dimiliki oleh graf lolipop L_n merupakan graf yang diperoleh dengan menggabungkan sebuah graf lengkap K_n ke sebuah graf lintasan P_1 dengan sebuah jembatan. Misalkan graf lengkap K_n diwarnai pada setiap simpulnya. Karena $(v_i, v_j) \in E(K_n)$ untuk setiap $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$, $i \neq j$, akibatnya setiap simpul harus diwarnai dengan warna yang berbeda (n simpul). Hal ini bertentangan dengan pengandaian awal bahwa banyaknya warna yang digunakan adalah $n - 1$ warna, sehingga pengandaian salah. Jadi benar bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan adalah n warna, diperoleh bahwa $\chi_e(L_n) = n$. ■

Bilangan Kromatik *Equitable* pada Graf Persahabatan f_n

Bilangan kromatik *equitable* pada graf persahabatan f_n dapat ditentukan dengan mewarnai graf persahabatan f_n sesuai dengan definisi pewarnaan *equitable*. Karakteristik yang dimiliki oleh graf persahabatan dengan $2n + 1$ simpul yaitu salah satu simpulnya v_0 berperan sebagai simpul pusat yang berderajat $2n$, artinya $(v_0, v_i) \in E(f_n)$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Kemudian untuk $2n$ simpul lainnya berderajat 2, yaitu $(v_j, v_{j+1}) \in E(f_n)$ untuk setiap j merupakan bilangan ganjil. Berikut diberikan graf persahabatan f_1, f_2, f_3, dan f_4 yang diilustrasikan pada Gambar 4.



Gambar 4. (i) Graf f_1; (ii) Graf f_2; (iii) Graf f_3; (iv) Graf f_4

Untuk $n = 1$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada f_1 seperti pada Gambar 4 (i). Diketahui $V(f_1) = \{v_0, v_1, v_2\}$ dengan $|V(f_1)| = 3$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf f_1. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(f_1)$ yang dapat dilihat pada Tabel 11.

Tabel 11. Kelas Warna dari $V(f_1)$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\lvert k_i \rvert}$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1\}$	1
3	$\{v_2\}$	1

Dari Tabel 11, dapat dilihat bahwa perwarnaan pada graf f_1 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 3$. Sehingga diperoleh $\chi_e(f_1) = 3$.

Selanjutnya untuk $n = 2$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada f_2 seperti pada Gambar 4 (ii). Diketahui $V(f_2) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dengan $|V(f_2)| = 5$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf f_2. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(f_2)$ yang dapat dilihat pada Tabel 12.

Tabel 12. Kelas Warna dari $V(f_2)$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\lvert k_i \rvert}$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1, v_4\}$	2
3	$\{v_2, v_3\}$	2

Dari Tabel 12, dapat dilihat bahwa perwarnaan pada graf f_2 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 3$. Sehingga diperoleh $\chi_e(f_2) = 3$.

Kemudian untuk $n = 3$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada f_3 seperti pada Gambar 4 (iii). Diketahui $V(f_3) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dengan $|V(f_3)| = 7$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf f_3. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(f_3)$ yang dapat dilihat pada Tabel 13.

Tabel 13. Kelas Warna dari $V(f_3)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1, v_6\}$	2
3	$\{v_2, v_3\}$	2
4	$\{v_4, v_5\}$	2

Dari Tabel 13, dapat dilihat bahwa perwarnaan pada graf f_3 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 4$. Sehingga diperoleh $\chi_e(f_3) = 4$.

Berikutnya untuk $n = 4$, dicari bilangan kromatik *equitable* pada f_4 seperti pada Gambar 4 (iv). Diketahui $V(f_4) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dengan $|V(f_4)| = 9$. Kemudian menentukan pewarnaan simpul pada graf f_4. Sehingga diperoleh kelas-kelas warna dari $V(f_4)$ yang dapat dilihat pada Tabel 14.

Tabel 14. Kelas Warna dari $V(f_4)$

i	k_i	$\lvert k_i \rvert$
1	$\{v_0\}$	1
2	$\{v_1, v_8\}$	2
3	$\{v_2, v_3\}$	2
4	$\{v_4, v_5\}$	2
5	$\{v_6, v_7\}$	2

Dari Tabel 14, dapat dilihat bahwa perwarnaan pada graf f_4 memenuhi Definisi 1, yaitu $\left||k_i| - |k_j|\right| \in \{0,1\}$, untuk setiap $1 \leq i, j \leq 5$. Sehingga diperoleh $\chi_e(f_4) = 5$.

Setelah diperoleh bilangan kromatik *equitable* pada graf persahabatan f_1, f_2, f_3, dan f_4, maka terbentuklah sebuah pola bilangan kromatik *equitable* f_n yang tersaji pada Tabel 15. Berdasarkan pola yang diperoleh pada Tabel 15, maka terbentuklah Teorema 5.

Tabel 15. Pola Bilangan Kromatik *Equitable* Graf f_n

i	$\chi_e(f_i)$
1	3
2	3
3	4
4	5
$\vdots$	$\vdots$
n	$\begin{cases} 3 & ; jika\ n = 1 \\ n+1 & ; jika\ n \geq 2 \end{cases}$

Teorema 5. *Jika f_n adalah graf persahabatan dengan simpul sebanyak $2n+1$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka*

$$\chi_e(f_n) = \begin{cases} 3 & ; jika\ n = 1 \\ n+1 & ; jika\ n \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

Diketahui f_n adalah graf persahabatan yang memiliki $V(f_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ dengan $|V(f_n)| = 2n+1$. Akan dibuktikan bahwa $\chi_e(f_n) = 3$, untuk $n = 1$ dan $\chi_e(f_n) = n+1$, untuk $n \geq 2$.

(i). $\chi_e(f_n) = 3$, untuk $n = 1$

Diketahui f_1 adalah graf persahabatan yang memiliki sebanyak tiga simpul. Karakteristik yang dimiliki oleh graf persahabatan f_1 yaitu grafnya membentuk graf sikel C_3 yang memiliki tiga simpul masing-masing berderajat 2. Karena $(v_i, v_j) \in E(f_1)$ untuk setiap $i, j \in \{0,1,2\}$, $i \neq j$, akibatnya setiap simpul harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Jadi minimum banyaknya warna yang digunakan adalah 3 warna, diperoleh bahwa $\chi_e(f_1) = 3$.

(ii). $\chi_e(f_n) = n+1$, untuk $n \geq 2$

Diketahui f_n adalah graf persahabatan dengan simpul sebanyak $2n+1$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Karakteristik yang dimiliki oleh graf persahabatan yaitu salah satu simpulnya v_0 berperan sebagai simpul pusat yang berderajat $2n$, artinya $(v_0, v_i) \in E(f_n)$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Kemudian, untuk $2n$ simpul lainnya berderajat 2, yaitu $(v_j, v_{j+1}) \in E(f_n)$ untuk setiap j merupakan bilangan ganjil. Misalkan v_0 diwarnai dengan warna 1, sehingga diperoleh $|k_1| = 1$ dengan $k_1 = \{v_0\}$. Karena $(v_0, v_i) \in E(f_n)$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, akibatnya $2n$ simpul lainnya harus diwarnai dengan warna selain 1. Kemudian sesuai dengan definisi pewarnaan *equitable*, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ haruslah $|k_m| \leq 2$, diperoleh $\frac{2n}{2}$ warna atau n warna yang digunakan. Sehingga banyaknya warna yang digunakan adalah $n+1$ warna.

Selanjutnya, menunjukkan bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan adalah $n+1$. Andaikan banyaknya warna yang digunakan adalah n warna. Jika v_0 diwarnai dengan warna 1, maka terdapat sebanyak $2n$ simpul yang belum diwarnai dan banyaknya warna yang belum diterapkan adalah $n-1$ warna. Dengan menggunakan prinsip sarang merpati yang dirampatkan (Munir, 2010), didapat sebarang k_m dengan kardinalitas lebih dari 2, karena $\left\lceil \frac{2n}{n-1} \right\rceil = 3$. Akibatnya terdapat tiga simpul yang diwarnai dengan warna yang sama. Hal ini bertentangan dengan pernyataan awal bahwa untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ haruslah $|k_m| \leq 2$, sehingga pengandaian salah. Jadi benar bahwa minimum banyaknya warna yang digunakan adalah $n+1$ warna, sehingga diperoleh bahwa $\chi_e(f_n) = n+1$, untuk $n \geq 2$. ■

KESIMPULAN

Bilangan kromatik *equitable* merupakan minimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan *equitable*. Pada penelitian ini, langkah awal untuk merumuskan bilangan kromatik *equitable* S_n, L_n, dan f_n adalah menerapkan pewarnaan simpul pada S_n, L_n, dan f_n. Dari pewarnaan simpul yang telah diterapkan, diperoleh kelas warna k_i, $i \in \mathbb{N}$. Setelah itu, mencari kardinalitas pada setiap kelas warna. Selanjutnya menganalisis bahwa pewarnaan simpul yang diterapkan memenuhi definisi pewarnaan *equitable*. Jika tidak memenuhi, maka peneliti kembali menerapkan pewarnaan simpul pada S_n, L_n, dan f_n. Jika memenuhi, maka lanjut ke tahap berikutnya. Tahap selanjutnya adalah membuktikan bahwa banyaknya warna yang digunakan adalah minimum. Sehingga, diperoleh $\chi_e(S_n)$, $\chi_e(L_n)$, dan $\chi_e(f_n)$ dan dibuktikan kebenarannya. Berdasarkan penelitian ini, diperoleh bilangan kromatik *equitable* untuk S_n dengan $n \in \mathbb{N}$ adalah $\chi_e(S_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$, untuk L_n dengan $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$ diperoleh $\chi_e(L_n) = n$, dan untuk f_n dengan $n \in \mathbb{N}$ diperoleh $\chi_e(f_n) = 3$, untuk $n = 1$ dan $\chi_e(f_n) = n + 1$, untuk $n \geq 2$.

REFERENSI

Anitha, A., & Arumugam, S. (2010). Degree Equitable Chromatic Number of a Graph. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 75*, 187-199.

Blum, D., Torrey, D., & Hammack, R. (2003). Equitable Chromatic Number of Complete Multipartite Graphs. *Missouri Journal of Mathematical Sciences, 15(2)*, 75-81.

Chen, B.-L., & Lih, K.-W. (1994). Equitable Coloring of Trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B(61)*, 83-87.

Furmanczyk, H. (2006). Equitable Coloring of Graph Products. *Opuscula Mathematica, 26(1)*, 31-44.

Gang, M. A., & Ming, M. A. (2012). The Equitable Total Chromatic Number of Some Join Graphs. *Open Journal of Applied Sciences, Vol.2(4B)*, 96-99.

Harary, F. (1994). *Graph Theory*. Michigan: Wesley Publishing Company Inc.

Irawati, D. (2013). Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND, Vol.2(1)*, 85-89.

Lam, P. C., Shiu, W. C., Tong, C. S., & Zhang, Z. F. (2001). On the Equitable Chromatic Number of Complete n-partite Graphs. *Discrete Applied Mathematics, 113*, 307-310.

Mertzios, G. B., & Unger, W. (2008). The Friendship Problem on Graphs. *1st International Conference on Relations, Orders and Graphs: Interaction with Computer Science*, 152-158.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit Edisi ke-3*. Bandung: Informatika Bandung.

Umam, I. A. (2021). Pelabelan L(2,1) pada Graf Lolipop. *Repository Universitas Jember*, 4-10.