Jurnal Matematika Murni dan Terapan "$\varepsilon psilon$"
Vol. 07, No.01, (2013), Hal. 33 – 44

PEMBUKTIAN SIFAT RUANG BANACH PADA $B_{1/4}(K)$

Malahayati

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
E-mail: malahayati_01@yahoo.co.id

Abstrak. Di dalam paper ini dipelajari himpunan semua fungsi Baire kelas 1/4 yang terbatas pada ruang metrik separabel K yang dinotasikan dengan $B_{1/4}(K)$. Haydon,dkk [5] membuktikan bahwa $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang Banach dengan menggunakan kriteria deret untuk kelengkapan. Di dalam paper ini hal tersebut dibuktikan dengan cara yang berbeda.

Kata Kunci : Ruang Banach, ruang metrik separabel,fungsi Baire.

Abstract. In this paper we study class of bounded Baire-1/4 functions on a separable metric space K denoted by $B_{1/4}(K)$. Haydon, et all [5] proved that $B_{1/4}(K)$ is a Banach space by using the series criterion for completeness. In this paper we prove the statement in a different way.

Keywords : Banach Space, separable metric space, Baire function

1. Pendahuluan

Himpunan semua fungsi Baire kelas satu yang terbatas pada K ditulis $B_1(K)$, dengan K sembarang ruang metrik separabel. Salah satu kelas bagian terpenting dari $B_1(K)$ adalah $D(K)$, yang menotasikan kelas semua fungsi pada K yang merupakan selisih fungsi-fungsi semikontinu terbatas pada K. Kelas $D(K)$ pertama kali dikenalkan oleh A.S Kechris dan Louveau pada tahun 1990.

Sejalan dengan kemajuan sains dan teknologi, kajian tentang $D(K)$ juga mengalami perkembangan sehingga muncul beberapa pengertian tentang $D(K)$ dan norma pada $D(K)$, seperti yang ditulis oleh Haydon, dkk [5] dan Rosenthal [8] serta Farmaki [3]. Kelas bagian terpenting dari $B_1(K)$ yang lain adalah $B_{1/4}(K)$, yang menotasikan himpunan semua fungsi Baire kelas 1/4 yang terbatas pada K. Kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ pertama kali dikenalkan oleh Haydon, dkk [5] yang didefinisikan dengan menggunakan pengertian $D(K)$.

Kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ memiliki peranan penting dalam cabang matematika diantaranya analisis fungsional, khususnya dalam pengaplikasian teori ruang Banach. Hasil temuan Haydon, Rosenthal dan Farmaki tersebut memberikan inisiatif untuk mempelajari lebih dalam tentang kelas fungsi $B_{1/4}(K)$. Lebih lanjut, karena belum ada pembuktian secara detail tentang sifat ruang Banach pada $B_{1/4}(K)$ maka dalam paper ini akan diberikan pembuktian sifat tersebut.

Sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi fungsi semikontinu dan kelas fungsi $D(K)$ yang akan digunakan dalam pembahasan mengenai $B_{1/4}(K)$. Fungsi-fungsi yang dibicarakan bernilai real dan didefinisikan pada E, dengan E himpunan bagian dari sebarang ruang metrik. Sebelumnya disepakati terlebih dahulu bahwa setiap pengambilan infimum dan supremum dari suatu himpunan berikut ini, himpunan yang dimaksud merupakan himpunan bagian dari $\overline{\mathbf{R}}$, dengan $\overline{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definisi 1.1. *Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada E dan $x_0 \in E$*

1. *Limit atas (upper limit) fungsi f untuk x mendekati x_0 ditulis dengan $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ dan didefinisikan*
$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) := \inf \{M_\varepsilon(f, x_0) : \varepsilon > 0\}$$
dengan $M_\varepsilon(f, x_0) = \sup\{f(x) : x \in N_\varepsilon(x_0) \cap E\}$.

2. *Lmit bawah (lower limit) fungsi f untuk x mendekati x_0 ditulis dengan $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ dan didefinisikan*
$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) := \sup \{m_\varepsilon(f, x_0) : \varepsilon > 0\}$$
dengan $m_\varepsilon(f, x_0) = \inf\{f(x) : x \in N_\varepsilon(x_0) \cap E\}$.

Definisi 1.2. *Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada E dan $x_0 \in E$*

1. *Fungsi f dikatakan semikontinu atas (**upper semicontinuous**) di x_0 apabila $f(x_0) = \overline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$ Selanjutnya, fungsi f dikatakan semikontinu atas pada E apabila fungsi f semikontinu atas di setiap $x \in E$.*

2. *Fungsi f dikatakan semikontinu bawah (**lower semicontinuous**) di x_0 apabila $f(x_0) = \underline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$ Selanjutnya, fungsi f dikatakan semikontinu atas pada E apabila fungsi f semikontinu bawah di setiap $x \in E$.*

3. *Fungsi yang semikontinu atas atau semikontinu bawah dinamakan **fungsi semikontinu**.*

Sifat fungsi semikontinu berikut ini akan banyak digunakan dalam membuktikan sifat selanjutnya.

Teorema 1.3. *Diberikan fungsi f yang terbatas pada runag metrik (E, d). Fungsi f semikontinu bawah pada E jika dan hanya jika terdapat barisan naik monoton fungsi-fungsi kontinu $\{f_n\}$ pada E sehingga $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke f pada E.*

Bukti. (Syarat perlu). Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $f_n : E \to \mathbb{R}$, dengan

$$f_n(x) = \inf\{f(t) + n\ d(x, t) : t \in E\}$$

Akan ditunjukkan $\{f_n\}$ naik monoton. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$f(t) + n\ d(x, t) \leq f(t) + (n + 1)\ d(x, t), \text{ untuk setiap } x, t \in E.$$

Oleh karena itu, diperoleh $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain barisan $\{f_n\}$ naik monoton.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, f_n kontinu pada E. Diambil sembarang $x, y \in E$, diperoleh

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \inf\{f(t) + n\ d(x, t) : t \in E\} \\ &\leq \inf\{f(t) + n\ d(y, t) + n\ d(x, y) : t \in E\} \\ &= \inf\{f(t) + n\ d(y, t) : t \in E\} + n\ d(x, y) \\ &= f_n(y) + n\ d(x, y) \end{aligned}$$

Dengan kata lain, diperoleh $f_n(x) - f_n(y) \leq n\ d(x, y)$. Dengan cara yang sama, diperoleh $f_n(y) - f_n(x) \leq n\ d(x, y)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq n\ d(x, y)$$

Selanjutnya, diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{n+1}$ sehingga untuk setiap $x, y \in E$ dengan $d(x, y) < \delta$, berlaku $|f_n(y) - f_n(x)| \leq n\ d(x, y) < n\delta < \varepsilon$. Dengan kata lain, terbukti f_n kontinu pada E.

Selanjutnya akan dibuktikan $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, untuk setiap $x \in E$. Karena fungsi f terbatas pada E maka f terbatas kebawah pada E. Oleh karena itu terdapat bilangan M, sehingga $M \leq f(x)$ untuk setiap $x \in E$. Diambil sembarang $x_0 \in E$, maka untuk setiap $n \in N$ berlaku

$$f_n(x_0) = \inf\{f(t) + n\ d(x_0, t) : t \in E\}$$

Oleh karena itu, diperoleh $f_n(x_0) \leq f(x_0) + n\ d(x_0, x_0) = f(x_0)$. Akibatnya

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \leq f(x_0)$$

Sebaliknya, diambil sembarang bilangan h, dengan $h < f(x_0)$, terdapat bilangan $\varepsilon > 0$ sehingga $f(x) > h$, untuk setiap $x \in N_\varepsilon(x_0) \cap E$. Karena $h, M, \varepsilon \in \mathbb{R}$ maka $\frac{h-M}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, menurut Archimedes terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $n_0 > \frac{h-M}{\varepsilon}$. Dengan kata lain, terdapat

$n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $M + \varepsilon n_0 > h$. Untuk setiap bilangan $n > n_0$, apabila $t \in N_\varepsilon(x_0) \cap E$, maka berlaku

$$\begin{aligned} f_n(x_0) &= \inf\{f(t) + n\ d(x_0, t) : t \in N_\varepsilon(x_0) \cap E\} \\ &\geq \inf\{f(t) : t \in N_\varepsilon(x_0) \cap E\} \\ &\geq h \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai-nilai t yang lain,

$$\begin{aligned} f_n(x_0) &= \inf\{f(t) + n\ d(x_0, t) : t \in E \backslash N_\epsilon(x_0)\} \\ &\geq \inf\{M + n\varepsilon : t \in E \backslash N_\varepsilon(x_0)\} \\ &= M + n\varepsilon > M + \varepsilon n_0 > h. \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk setiap $n > n_0$, karena $f_n(x_0) \geq h$ untuk setiap $h < f(x_0)$ maka diperoleh $f_n(x_0) \geq f(x_0)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \geq f(x_0).$$

Jadi, diperoleh $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

(Syarat Cukup). Diambil sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa himpunan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terbuka. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) > \alpha\}$$

Diambil sebarang $x \in \{x \in E : f(x) > \alpha\}$, maka berlaku $f(x) > \alpha$. Andaikan $f_n(x) \leq \alpha$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka berlaku, $f_n(x) \leq \alpha < f(x)$. Karena $f(x) > \alpha$ maka $f(x) - \alpha > 0$. Oleh karena itu, diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(x) - \alpha) > 0$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$|f_n(x) - f(x)| \geq |f(x) - \alpha| = f(x) - \alpha > \frac{1}{2}(f(x) - \alpha) = \varepsilon.$$

Kontradiksi dengan f_n konvergen titik demi titik ke f. Jadi $f_n(x) > \alpha$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, terbukti $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in E : f_n(x) > \alpha\}$. Sebaliknya, diambil sembarang $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in E : f_n(x) > \alpha\}$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $f_N(x) > \alpha$. Andaikan $f(x) \leq \alpha$, maka diperoleh

$$f_N(x) > \alpha \geq f(x)$$

Karena barisan f_n naik monoton, maka $f_m \geq f_N$, untuk setiap $m > N$. Diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}(f_N(x) - f(x)) > 0$. Karena $f(x) < f_N(x) \leq f_m(x)$, untuk setiap $m > N$, maka diperoleh

$$|f_m(x) - f(x)| \geq |f_N(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Kontradiksi dengan f_n konvergen titik demi titik ke f. Jadi $f(x) > \alpha$. Oleh karena itu diperoleh $\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) > \alpha\}$. Karena himpunan $\{x \in E : f_n(x) > \alpha\}$ terbuka, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) > \alpha\}$ terbuka. Akibatnya himpunan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ terbuka. Terbukti fungsi f semikontinu bawah pada E. $\square$

Fungsi-fungsi yang dibicarakan selanjutnya bernilai real dan didefinisikan pada K, dengan K sebarang ruang metrik separabel kecuali disebutkan lain. Selain itu, himpunan semua fungsi-fungsi kontinu pada K dinotasikan dengan $C(K)$.

Fungsi f dikatakan anggota $D(K)$ jika terdapat fungsi-fungsi semikontinu terbatas u dan v pada K sehingga $f = u - v$.

Pemakaian definisi $D(K)$ secara langsung cukup menyulitkan, oleh karena itu diperlukan suatu hasil yang lebih memudahkan. Hal ini telah ditulis oleh Farmaki [3] yang tertuang dalam lemma-lemma berikut ini.

Lemma 1.4. *Fungsi $f \in D(K)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas u dan v pada K, sehingga $f = u - v$.*

Bukti. (Syarat cukup). Diketahui fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas u dan v pada K, sehingga $f = u - v$. Menurut definisi $D(K)$, jelas $f \in D(K)$.

(Syarat perlu). Diketahui $f \in D(K)$, berarti terdapat fungsi-fungsi semikontinu terbatas u dan v pada K, sehingga $f = u - v$. Dalam hal ini ada beberapa kemungkinan, yaitu Kemungkinan pertama : Jika u dan v fungsi-fungsi semikontinu atas terbatas pada K, maka diperoleh $f = u - v = (-v) - (-u)$. Karena u dan v fungsi-fungsi semikontinu atas, maka $-u$ dan $-v$ fungsi-fungsi semikontinu bawah. Oleh karena itu, apabila $u' = -v$ dan $v' = -u$ maka diperoleh u', v' fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas pada K dan $f = u' - v'$. Kemungkinan kedua : Jika u fungsi semikontinu bawah terbatas pada K dan v fungsi semikontinu atas terbatas pada K, maka $f = u - v = (u - v) - 0$. Karena v fungsi semikontinu atas, maka $-v$ fungsi semikontinu bawah sehingga $u - v$ fungsi semikontinu bawah. Oleh karena itu, apabila $u' = u - v$ dan $v' = 0$ maka diperoleh u', v' fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas pada K dan $f = u' - v'$. Kemungkinan ketiga : Jika u fungsi semikontinu atas terbatas pada K dan v fungsi semikontinu bawah terbatas pada K, maka $f = u - v = 0 - (v - u)$. Karena u fungsi semikontinu atas, maka $-u$ fungsi semikontinu bawah sehingga $v - u$ fungsi semikontinu bawah. Oleh karena itu, jika $u' = 0$, dan $v' = v - u$ maka diperoleh u', v' fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas pada K dan $f = u' - v$. □

Untuk selanjutnya, apabila f sebarang fungsi yang didefinisikan pada K, notasi $f \geq 0$ dimaksudkan $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in K$.

Lemma 1.5. *Fungsi $f \in D(K)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas $u, v \geq 0$ pada K, sehingga $f = u - v$.*

Bukti. (Syarat cukup). Diketahui fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas $u, v \geq 0$ pada K sehingga $f = u - v$. Oleh karena itu, menurut Lemma 1.4, jelas $f \in D(K)$.

(Syarat perlu). Diketahui $f \in D(K)$, maka menurut Lemma 1.4 terdapat fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas g dan h pada K sehingga $f = g - h$. Karena g fungsi semikontinu bawah terbatas pada K, maka terdapat barisan $\{\varphi_n\}$ di $C(K)$ sehingga $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$ dengan $\varphi_0 = 0$ dan $\{\varphi_n\}$ konvergen titik demi titik ke

g. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j - \varphi_{j-1})(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \varphi_{j-1})(x) \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in K$. Selanjutnya, karena h juga fungsi semikontinu bawah terbatas pada K, maka terdapat barisan $\{\psi_n\} \subseteq C(K)$ sehingga $\psi_0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \ldots$ dengan $\psi_0 = 0$ dan $\{\psi_n\}$ konvergen titik demi titik ke h. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\psi_j - \psi_{j-1})(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j - \psi_{j-1})(x) \end{aligned}$$

untuk setiap $x \in K$. Akibatnya, untuk sebarang $x \in K$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) - h(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \varphi_{j-1})(x) - \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j - \psi_{j-1})(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya, namakan $u = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \varphi_{j-1})(x)$ dan $v = \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j - \psi_{j-1})(x)$. Karena $\varphi_j - \varphi_{j-1} \geq 0$ dan $\psi_j - \psi_{j-1} \geq 0$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots$, maka diperoleh $u, v \geq 0$. Jadi terdapat fungsi-fungsi semikontinu bawah terbatas $u, v \geq 0$ pada K sehingga $f = u - v$. □

2. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas kelas fungsi $B_{1/4}(K)$, yaitu menotasikan himpunan semua fungsi Baire kelas 1/4 yang terbatas pada K. Sebelumnya, diberikan pengertian $B_{1/4}(K)$, dilanjutkan dengan membahas beberapa sifat-sifatnya yang akan digunakan dalam membuktikan sifat ruang Banach pada $B_{1/4}(K)$.

Definisi 2.1. *Diberikan ruang metrik separable K. Kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ didefinisikan*

$$\begin{aligned} B_{1/4}(K) &= \Big\{ f : K \to \mathbb{R} : \textit{terdapat } \{f_n\} \subseteq D(K) \textit{ sehingga } \|f_n - f\|_\infty \to 0 \\ &\quad\quad \textit{dan } \sup_n \|f_n\|_D < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang linier.

Lemma 2.2. *Diberikan ruang metrik separabel K, kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang linier.*

Bukti. **1.** Diambil sembarang $f, g \in B_{1/4}(K)$, maka terdapat barisan-barisan $\{f_n\}, \{g_n\}$ di $D(K)$ sehingga $\|f_n - f\|_\infty \to 0, \|g_n - g\|_\infty \to 0$ dan $\sup_n \|f_n\|_D < \infty, \sup_n \|g_n\|_D < \infty$. Karena $f_n, g_n \in D(K)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka diperoleh $f_n + g_n \in D(K)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dibentuk $h_n = f_n + g_n$, sehingga diperoleh barisan $\{h_n\}$ di $D(K)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \|h_n - (f+g)\|_\infty &= \|(f_n + g_n) - (f+g)\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Apabila $n \to \infty$ maka diperoleh $\|h_n - (f+g)\|_\infty \to 0$. Selanjutnya, untuk setiap $n \in N$, diperoleh

$$\|h_n\|_D = \|f_n + g_n\|_D \leq \|f_n\|_D + \|g_n\|_D.$$

Karena $\sup_n \|f_n\|_D < \infty$ dan $\sup_n \|g_n\|_D < \infty$, akibatnya diperoleh $\sup_n \|h_n\|_D < \infty$. Dengan demikian terdapat barisan $\{h_n\}$ di $D(K)$ sehingga $\|h_n - (f+g)\|_\infty \to 0$ dan $\sup_n \|h_n\|_D < \infty$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $f + g \in B_{1/4}(K)$.

2. Diambil sebarang $f \in B_{1/4}(K)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka terdapat barisan $\{f_n\}$ di $D(K)$ sehingga $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ dan $sup_n \|f_n\|_D < \infty$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dibentuk $g_n = \alpha f_n$, sehingga diperoleh barisan $\{g_n\}$ di $D(K)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\|g_n - \alpha f\|_\infty = \|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f_n - f\|_\infty.$$

Karena $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, akibatnya diperoleh $\|g_n - \alpha f\|_\infty \to 0$. Selanjutnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diperoleh $\|g_n\|_D = \|\alpha f_n\|_D = |\alpha| \|f_n\|_D$. Karena $\sup_n \|f_n\|_D < \infty$, akibatnya diperoleh $\sup_n \|g_n\|_D < \infty$. Dengan demikian terdapat barisan $\{g_n\}$ di $D(K)$ sehingga $\|g_n - \alpha f\|_\infty \to 0$ dan $\sup_n \|g_n\|_D < \infty$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $\alpha f \in B_{1/4}(K)$. Jadi terbukti $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang linier. □

Definisi 2.3. *Untuk setiap $f \in B_{1/4}(K)$ didefinisikan fungsi $\| \cdot \|_{1/4} : B_{1/4}(K) \to \mathbb{R}$ dengan*

$$\|f\|_{1/4} = \inf \left\{ \sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \ dan\ \|f_n - f\|_\infty \to 0 \right\}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang bernorma terhadap $\|.\|_{1/4}$. Terlebih dahulu dibuktikan beberapa lemma yang akan digunakan dalam pembuktian.

Lemma 2.4. *Jika $f \in B_{1/4}(K)$ maka $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{1/4}$.*

Bukti. Diambil sebarang $f \in B_{1/4}(K)$, dan barisan $\{f_n\} \subseteq D(K)$ dengan $\sup_n \|f_n\|_D < \infty$ dan $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_n\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_n\|_D \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + \sup_n \|f_n\|_D \end{aligned}$$

Selanjutnya, karena $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, maka diperoleh

$$\|f\|_\infty \leq \sup_n \|f_n\|_D.$$

Oleh karena itu, $\|f\|_\infty$ merupakan batas bawah dari himpunan $\{\sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|f_n - f\|_\infty \to 0\}$. Akibatnya, diperoleh

$$\|f\|_\infty \leq \inf \left\{ \sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|f_n - f\|_\infty \to 0 \right\}.$$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{1/4}$. □

Lemma 2.5. *Jika $f \in B_{1/4}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ maka berlaku*

$$\left\{ \sup_n \|\alpha f_n\|_D : \{\alpha f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|\alpha f_n\|_D < \infty \textit{ dan } \|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty \to 0 \right\} =$$
$$\left\{ \sup_n \|g_n\|_D : \{g_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|g_n\|_D < \infty \textit{ dan } \|g_n - \alpha f\|_\infty \to 0 \right\}$$

Bukti. Diambil sebarang $f \in B_{1/4}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Untuk kemudahan pembuktian, namakan

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \sup_n \|\alpha f_n\|_D : \{\alpha f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|\alpha f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty \to 0 \right\} \\ B &= \left\{ \sup_n \|g_n\|_D : \{g_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|g_n\|_D < \infty \text{ dan } \|g_n - \alpha f\|_\infty \to 0 \right\} \end{aligned}$$

Akan dibuktikan $A = B$.

Diambil sebarang $a \in A$, maka terdapat barisan $\{\alpha f_n\} \subseteq D(K)$ dengan $\sup_n \|\alpha f_n\|_D < \infty$ dan $\|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty \to 0$ sehingga $a = \sup_n \|\alpha f_n\|_D$. Selanjutnya untuk sebarang α dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dibentuk $g_n = \alpha f_n$, maka diperoleh $\{g_n\} \subseteq D(K)$ dan $\sup_n \|g_n\|_D < \infty$. Akibatnya, $\|g_n - \alpha f\|_\infty \to 0$ dan $a = \sup_n \|g_n\|_D$. Oleh karena itu, $a \in B$. Dengan kata lain, diperoleh $A \subseteq B$.

Sebaliknya, diambil sembarang $b \in B$ maka terdapat barisan $\{g_n\}$ di $D(K)$ dengan $\sup_n \|g_n\|_D < \infty$ dan $\|g_n - \alpha f\|_{\to} 0$, sehingga diperoleh $b = \sup_n \|g_n\|_D$. Selanjutnya, untuk sebarang $a \neq 0$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, namakan $f_n = \frac{g_n}{\alpha}$, maka diperoleh barisan $\{\alpha f_n\} \subseteq D(K)$ dan $\sup_n \|\alpha f_n\|_D < \infty$. Akibatnya, diperoleh $\|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty \to 0$ dan $b = \sup_n \|\alpha f_n\|_D$. Oleh karena itu diperoleh $b \in A$, dengan kata lain $B \subseteq A$.
Jadi terbukti bahwa $A = B$. □

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, dengan menggunakan Lemma 2.4 dan Lemma 2.5, dapat dibuktikan bahwa fungsi $\|\cdot\|_{1/4}$ adalah norma pada $B_{1/4}(K)$.

Teorema 2.6. *Fungsi $\|\cdot\|_{1/4}$ adalah norma pada $B_{1/4}(K)$*

Bukti. **(N1)**. Diambil sebarang $f \in B_{1/4}(K)$. Karena

$$\|f\|_{1/4} = \inf\left\{\sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|f_n - f\|_\infty \to 0\right\}$$

maka diperoleh $\|f\|_{1/4} \geq 0$. Selanjutnya, jika $\|f\|_{1/4} = 0$ maka berdasarkan Lemma 2.4 diperoleh $\|f\|_\infty = 0$. Oleh karena itu, $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in K$, dengan kata lain $f = \mathbf{0}$. Sebaliknya, jika $f = 0$ maka terdapat barisan $\{f_n\} \subseteq D(K)$ dengan $f_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\sup_n \|f_n\|_D < \infty$ dan $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, akibatnya diperoleh

$$\|f\|_{1/4} = \inf\left\{\sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|f_n - f\|_\infty \to 0\right\} = 0$$

Dengan kata lain, benar bahwa $\|f\|_{1/4} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$.

(N2). Diambil sembarang $f \in B_{1/4}(K)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Lemma 2.4, diperoleh

$$\begin{aligned}
|\alpha|\|f\|_{1/4} &= |\alpha| \inf\left\{\sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|f_n - f\|_\infty \to 0\right\} \\
&= \inf\left\{|\alpha| \sup_n \|f_n\|_D : \{f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|f_n\|_D < \infty \text{ dan } \|f_n - f\|_\infty \to 0\right\} \\
&= \inf\left\{\sup_n \|\alpha f_n\|_D : \{\alpha f_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|\alpha f_n\|_D < \infty \text{ dan}\right. \\
&\qquad \left.\|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty \to 0\right\} \\
&= \inf\left\{\sup_n \|g_n\|_D : \{g_n\} \subseteq D(K), \sup_n \|g_n\|_D < \infty \text{ dan } \|g_n - f\|_\infty \to 0\right\} \\
&= \|\alpha f\|_{1/4}
\end{aligned}$$

(N3). Diambil $f, g \in B_{1/4}(K)$ dan ε >0 sebarang, maka terdapat barisan-barisan $\{f_n\}, \{g_n\} \subseteq D(K)$ dengan $\|f_n - f\|_\infty \to 0, \|g_n - g\|_\infty \to 0$ dan $\sup_n \|f_n\|_D < \infty, \sup_n \|g_n\|_D < \infty$, sehingga berlaku

$$\sup_n \|f_n\|_D < \|f\|_{1/4} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \sup_n \|g_n\|_D < \|g\|_{1/4} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|f\|_{1/4} + \|g\|_{1/4} &> \sup_n \|f_n\|_D + \sup_n \|g_n\|_D \\
&\geq \sup_n \|f_n + g_n\|_D \\
&\geq \|f_n + g_n\|_{1/4}
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk $\varepsilon > 0$ sembarang, maka diperoleh

$$\|f\|_{1/4} + \|g\|_{1/4} \geq \|f_n + g_n\|_{1/4}$$

Berdasarkan (N1), (N2), dan (N3), terbukti bahwa fungsi $\|\cdot\|_{1/4}$ adalah norma pada $B_{1/4}(K)$. $\square$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang Banach.

Teorema 2.7. *Diberikan ruang metrik separabel K, kelas fungsi $B_{1/4}(K)$ merupakan ruang Banach.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.6, $\left(B_{1/4}(K), \|\cdot\|_{1/4}\right)$ merupakan ruang bernorma, selanjutnya akan dibuktikan $B_{1/4}(K)$ lengkap. Diambil sebarang barisan Cauchy $\{f_n\} \subseteq B_{1/4}(K)$. Oleh karena itu, dapat diasumsikan bahwa $\|f_{n+1} - f_n\|_{1/4} < \frac{1}{2^n}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $f_{n+1} - f_n \in B_{1/4}(K)$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat barisan $\{\varphi_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ di $D(K)$, sehingga diperoleh $\|\varphi_m^n - (f_{n+1} - f_n)\|_\infty \to 0$ dan $\sup_m \|\varphi_m^n\|_D \leq \frac{1}{2^n}$.

Karena $\{f_n\}$ barisan Cauchy di $(B_{1/4}(K$, maka berdasarkan Lemma 2.4, diperoleh $\|f_m - f_n\|_\infty \to 0$, untuk $n, m \to \infty$. Oleh karena itu, untuk setiap $x \in K$ diperoleh $\{f_n(x)\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka untuk setiap $x \in K$ terdapat $f(x) \in \mathbb{R}$ sehingga barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen ke $f(x)$. Akibatnya diperoleh $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Diambil sembarang $n_0 \in \mathbb{N}$. Dibentuk $g_n = f_{n+1} - f_n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\psi_n = \varphi_n^{n_0} + \cdots + \varphi_n^n$, untuk setiap $n \geq n_0$. Oleh karena itu diperoleh barisan $\{\psi_n\} \subseteq D(K)$ dan berlaku

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} g_n &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=n_0}^{k} g_n \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=n_0}^{k} (f_{n+1} - f_n) \\
&= \lim_{k\to\infty} (f_{k+1} - f_{n_0}) = f - f_{n_0}.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $f - f_{n_0} \in B_{1/4}(K)$. Untuk setiap $l, n \in \mathbb{N}$ dengan $n_0?l < n$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|\psi_n - (\varphi_n^{n_0} + \cdots + \varphi_l^n)\|_\infty &= \|\varphi_n^{l+1} + \cdots + \varphi_n^n\|_\infty \\
&\leq \|\varphi_n^{l+1}\|_\infty + \cdots + \|\varphi_n^n\|_\infty \\
&\leq \|\varphi_n^{l+1}\|_D + \cdots + \|\varphi_n^n\|_D \\
&= \sum_{i=l+1}^{n} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^l}
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, apabila $n \to \infty$ maka berlaku

$$\begin{aligned}
& \left\| \lim_{n\to\infty} \|\psi_n - (\varphi_n^{n_0} + \cdots + \varphi_l^n) \right\|_\infty < \frac{1}{2^l} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\| \lim_{n\to\infty} \psi_n - \left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{n_0} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \varphi_l^n \right) \right\|_\infty < \frac{1}{2^l} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\| \lim_{n\to\infty} \psi_n - ((f_{n_0+1} - f_{n_0}) + \cdots + (f_{l+1} - f_l)) \right\|_\infty < \frac{1}{2^l} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\| \lim_{n\to\infty} \psi_n - (f_{l+1} - f_{n_0}) \right\| < \frac{1}{2^l}
\end{aligned}$$

Apabila $l \to \infty$ maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - (f - f_{n_0})\|_\infty = 0$$

Dengan kata lain, diperoleh $\|\psi_n - (f - f_{n_0})\|_\infty \to 0$. Disisi lain, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\psi_n\|_D &= \|\,(\varphi_n^{n_0} + \cdots + \varphi_n^n)\,\|_D \\
&\leq \|\varphi_n^{n_0}\|_D + \cdots + \|\varphi_n^n\|_D \\
&\leq \sum_{i=n_0}^{n} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka diperoleh

$$\sup_n \|\psi_n\|_D \leq \frac{1}{2}$$

Dengan demikian, ada barisan $\{\psi_n\} \subseteq D(K)$ sehingga $\|\psi_n - (f - f_{n_0})\|_\infty \to 0$ dan $\sup_n \|\psi_n\|_D \leq \frac{1}{2}$. Dengan kata lain, benar bahwa $f - f_{n_0} \in B_{1/4}(K)$. Karena $B_{1/4}(K)$ ruang linier, maka diperoleh $f \in B_{1/4}(K)$. Selanjutnya, berdasarkan asumsi diawal pembuktian, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_0}\|_{1/4} &= \left\| \sum_{n=n_0}^{\infty} g_n \right\|_{1/4} \\
&= \left\| \sum_{n=n_0}^{\infty} f_{n+1} - f_n \right\|_{1/4} \\
&\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{1/4} \\
&\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \text{ untuk setiap } n_0 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sembarang $n_0 \in N$, maka diperoleh barisan $\{f_n\}$ konvergen ke f . Jadi, terbukti $B_{1/4}(K)$ ruang Banach. $\square$

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa sifat ruang Banach berlaku pada $B_{1/4}(K)$. Sifat tersebut dapat ditunjukkan dengan menggunakan definisi kelengkapan biasa yang melibatkan barisan Cauchy.

Daftar Pustaka

[1] Ash, R.B. 2007. *Real Variables with Basic Metric Space Topology*. Department of Mathematics University of Illionis at Urbana-Champaign.

[2] Dugundji, J. 1966. *Topology*. Allyn and Bacon Inc. Boston.

[3] Farmaki, V. 1996. *On Baire*-1/4 *Functions*. Trans. Amer. Math. Soc, 348, 10.

[4] Gordon, R.A. 1994. *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. American Mathematical Society USA.

[5] Haydon, R., Odell, E. dan Rosenthal, H.P. 1991. *On Certain Classes of Baire-1 Functions with Applications to Banach Space Theory*. Lecture Notes in Math. 1470. Springer New York.

[6] Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons Inc. Canada.

[7] McShane, E.J. 1944. *Integration*. Princeton University Press. Princeton.

[8] Rosenthal, H.P. 1994. *A Characterization of Banach Spaces Containing C0*. J. Amer. Math. Soc, 7, 3, 707-748.

[9] Rosenthal, H.P. 1994. *Differences of Bounded Semi-Continuous Functions I*. http://www.arxiv.org/abs/math/9406217.