Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.17 No.1 (Juni 2023) Hal. 101-116

SIFAT SUBGRUP NORMAL DARI ANTI SUBGRUP NORMAL FUZZY

Cendikia Hira[1], Saman Abdurrahman[2], Thresye[3]

[1,2,3]Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email: cendihir@gmail.com

ABSTRACT

A fuzzy set is a concept theory that provide a solution of problem that cannot be explained by crisp set. Along with time, research of a fuzzy set are combined with algebra that produce fuzzy algebra. One of the research is a fuzzy subgroup and fuzzy level subset. The other research is an anti fuzzy subgroup that is inspired by a fuzzy subgroup. The purpose of this research is to write further study of anti fuzzy subgroup properties by induction of properties of fuzzy algebra such as fuzzy set, fuzzy subgroup, and anti fuzzy subgroup. The research procedure is to study the basic concept of fuzzy set, fuzzy subgroup, and anti fuzzy subgroup. Using that concept to proof the properties of the anti fuzzy subgroup. The conclusions are in the anti fuzzy subgroup, set N_σ with σ anti fuzzy subgroup is a subgroup of a group N that can be applied to complement of σ and normal anti fuzzy subgroup closely related to anti fuzzy left coset, right coset, and middle coset.

Keywords : Group, Subgroup, Coset, Fuzzy Subgroup, Anti Fuzzy Subgroup.

ABSTRAK

Himpunan fuzzy adalah konsep dimana menyajikan suatu permasalahan yang tidak bisa ditentukan oleh himpunan tegas. Seiring berjalannya waktu, penelitian konsep himpunan fuzzy dipadukan dengan konsep aljabar yang menghasilkan aljabar fuzzy. Salah satu penelitian dari aljabar fuzzy adalah subgrup fuzzy dan level subset fuzzy. Penelitian lainnya adalah anti subgrup fuzzy yang terinspirasi dari subgrup fuzzy. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji lebih jauh sifat-sifat anti subgrup fuzzy dengan menginduksi sifat-sifat yang ada pada penelitian di aljabar fuzzy seperti himpunan fuzzy, subgrup fuzzy, dan anti subgrup fuzzy. Prosedur penelitian ini adalah dengan mengkaji konsep-konsep dasar penelitian yang ada pada himpunan fuzzy, subgrup fuzzy, dan anti subgrup fuzzy. Maka dari itu dengan memakai konsep tersebut dibuktikanlah sifat-sifat dari anti subgrup fuzzy. Hasil penelitian pada anti subgrup fuzzy adalah himpunan N_σ dengan σ anti subgrup fuzzy adalah subgrup dari grup N berlaku juga untuk σ komplemennya dan subgrup normal anti fuzzy berkaitan erat dengan koset kiri, kanan, dan tengah anti fuzzy.

Kata kunci: Grup, Subgrup, Koset, Subgrup Fuzzy, Anti Subgrup Fuzzy

Received: 14 Juni 2023, Accepted: 14 Agustus 2023, Published: 18 Agustus 2023

PENDAHULUAN

Matematika adalah dasar dari ilmu sains. Secara keseluruhan di kehidupan sehari-hari akan ditemukan berbagai hal yang berkaitan dengan matematika. Salah satu bidang kajian di matematika adalah aljabar. Struktur aljabar adalah salah satu kajian dalam aljabar. Salah satu konsep dari struktur aljabar adalah grup. Menurut Barnard & Neill (2017), Ford (2020) dan Abdurrahman (2022) grup adalah himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner sedemikian sehingga memenuhi sifat asosiatif, memiliki identitas dan untuk seluruh elemennya memiliki invers.

Sejalan dengan perkembangan, penelitian dengan topik grup mulai dikombinasikan dengan bidang lain, diantarannya dengan himpunan fuzzy. Konsep dari himpunan fuzzy diteliti oleh Jezewski et al (2017). Lalu, himpunan fuzzy telah berkembang lebih pesat di banyak bidang, di antaranya teknik mesin, medikal sains, sosial sains, teori graf, dan lain sebagainya. Pada bidang aljabar, penelitian grup fuzzy diteliti oleh Abdi et al (2018) yang meneliti lebih jauh tentang subgrup fuzzy. Penelitian lainnya yang terinspirasi dari subgrup fuzzy yaitu menghasilkan anti subgrup fuzzy dilakukan oleh Onasanya & Ilori (2014), Yasir et al (2016) dan Gayen et al (2021). Setelah itu, penelitian dilanjutkan lebih jauh dengan meneliti hubungan antara subgrup fuzzy dan anti subgrup fuzzy yang dilakukan oleh Chandrasekaran & Deepica (2019). Selanjutnya, Onasanya (2016) meneliti tentang sifat subgrup normal dari anti subgrup normal fuzzy lebih jauh. Pada tulisan ini, akan diteliti tentang sifat subgrup normal dari anti subgrup normal fuzzy dengan menambahkan beberapa sifat terkait yang diinduksi dari Onasanya (Onasanya, 2016).

TINJAUAN PUSTAKA

1. Himpunan, Relasi, dan Fungsi

Suatu himpunan adalah kumpulan dari objek tertentu yang terdefinisi secara jelas dan sebagai satu kesatuan. Suatu himpunan P dikatakan subset atau bagian dari himpunan Q jika seluruh elemen P termuat di Q.

Berikut disajikan beberapa definisi dan teorema mengenai fungsi, himpunan, relasi, dan pemetaan.

Definisi 1 (Ford, 2020)
Misalkan P dan Q adalah himpunan atas himpunan semesta U.

(i). Gabungan dari P dan Q, dinotasikan dengan $P \cup Q$, adalah
$$P \cup Q = \{x \in U : x \in P \text{ atau } x \in Q\}.$$
(ii). Irisan dari P dan Q, dinotasikan dengan $P \cap Q$, adalah
$$P \cap Q = \{x \in U : x \in P \text{ dan } x \in Q\}.$$
(iii). Selisih dari P dan Q, dinotasikan dengan $P \backslash Q$, adalah
$$P \backslash Q = \{x \in U : x \in P \text{ dan } x \notin Q\}.$$
(iv). Komplemen dari P, dinotasikan dengan P^C, adalah
$$P^C = \{x \in U : x \notin P\}$$
(v). Subset dari P dalam Q dinotasikan dengan $P \subseteq Q$ adalah
$$. P \subseteq Q = \{x \in U : jika\ x \in P \text{ maka } x \in Q\}.$$

Proposisi 2 (Ford, 2020)
Jika P adalah himpunan dan himpunan semestanya adalah U, maka $(P^c)^c = P$.

2. Grup

Pada bagian berikut ini, diberikan definisi dan juga sifat-sifat dari grup.

Definisi 3 (Barnard & Neill, 2017)
Suatu himpunan tidak kosong N disebut grup jika pada N didefinisikan suatu operasi biner sehingga memenuhi kondisi :
(i). $(a * b) * c = a * (b * c)$ *untuk seluruh* $a, b, c \in N$;
(ii). memiliki suatu elemen $e \in N$ *sehingga* $e * a = a * e = a$ *untuk seluruh* $a \in N$; *dan*
(iii). untuk $a \in N$, *terdapat suatu* $a^{-1} \in N$ *sehingga* $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Proposisi 4 (Abdurrahman, 2022)
Diberikan N grup maka untuk seluruh $a \in N$ *hanya mempunyai satu invers* $b \in N$.

Proposisi 5 (Abdurrahman, 2022)
Jika N merupakan suatu grup maka untuk seluruh $x \in N$ *memenuhi* $(x^{-1})^{-1} = x$.
Misalkan $(N,*)$ *merupakan suatu grup,* $H \subset N$, *dan* $H \neq \emptyset$. *Subset H merupakan subgrup dari N jika hanya jika*
(i). $x * y \in N$ *untuk seluruh* $x, y \in N$
(ii).x^{-1} *untuk seluruh* $x \in N$.

Definisi 6 (Abdurrahman, 2022)
Diberikan N grup dan L merupakan subgrup dari N, *maka L adalah normal jika dan hanya jika* $nln^{-1} \in L$ *untuk seluruh* $n \in N$ *dan* $l \in L$.

3. Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy adalah konsep perluasan dari himpunan klasik atau tegas. Himpunan klasik atau tegas adalah himpunan yang dimana setiap elemennya hanya dapat dinyatakan sebagai anggota atau bukan anggota. Tetapi di himpunan fuzzy setiap elemennya dinyatakan kembali oleh fungsi karakteristiknya, yaitu fungsi yang memetakan setiap elemennya ke rentang nilai 0 sampai 1. Dimana jika nilainya 1 maka elemen merupakan anggota penuh, nilai 0 berarti bukan anggota, dan jika nilai di antara rentang 0 sampai 1 tidak dapat ditentukan keanggotaannya.

Berikut penjelasan himpunan fuzzy.

Definisi 7 (Jezewski et al., 2017)
Jika N merupakan suatu himpunan, maka pemetaan $\sigma : N \to [0,1]$ *disebut sebagai subset fuzzy dari* N.

Definisi 8 (Jezewski et al., 2017)
Diberikan N merupakan grup jika σ merupakan suatu subset fuzzy dari N maka untuk komplemen dari σ dinotasikan dengan σ^c *merupakan suatu himpunan fuzzy dari N yang terdefinisi yaitu dengan untuk seluruh* $n \in N$

$$\sigma^c(N) = 1 - \sigma(N).$$

Definisi 9 (Onasanya & Ilori, 2014)
Misalkan σ merupakan subset fuzzy dari suatu himpunan N. Untuk $a \in [0,1]$, level subset dari suatu himpunan fuzzy σ merupakan himpunan
$$\sigma_a = \{n \in N : \sigma(n) \geq a\}.$$

4. Subgrup Fuzzy

Konsep subgrup fuzzy adalah konsep yang memadukan antara subgrup dengan himpunan fuzzy. Berikut penjelasan lebih lanjut yang membahas tentang subgrup fuzzy dan subgrup normal fuzzy.

Definisi 10 (Abdi et al., 2018)
Misalkan N merupakan suatu grup. Suatu subset fuzzy σ dari N merupakan subgrup fuzzy dari N jika untuk seluruh $m, n \in N$
i. $\sigma(mn) \geq \min\{\sigma(m), \sigma(n)\}$,
ii. $\sigma(n^{-1}) \geq \sigma(n)$.

Proposisi 11 (Abdi et al., 2018)
Diberikan N merupakan grup jika σ merupakanb suatu subgrup fuzzy dari grup N, maka untuk seluruh $n \in N$:
i. $\sigma(e) \geq \sigma(n)$,
ii. $\sigma(n^{-1}) = \sigma(n)$.

Definisi 12 (Onasanya, 2016)
Misalkan σ adalah fuzzy subgrup dari Grup N dan $a, b \in N$
i. Koset kiri fuzzy dari σ dinotasikan $a\sigma$ didefinisikan dengan $(a\sigma)x = \sigma(a^{-1}x)$ untuk seluruh $x \in N$.
ii. Koset kanan fuzzy dari σ dinotasikan σa didefinisikan dengan $(\sigma a)x = \sigma(xa^{-1})$ untuk seluruh $x \in N$.
iii. Koset tengah fuzzy dari σ dinotasikan $a\sigma b$ didefinisikan dengan $(a\sigma b)x = \sigma(a^{-1}xb^{-1})$ untuk seluruh $x \in N$.

Definisi 13 (Onasanya, 2016)
Misalkan σ merupakan suatu subgrup fuzzy dari grup N sehingga σ disebut subgrup normal fuzzy adalah jika untuk seluruh $m, n \in N$ memenuhi
$$\sigma(m) = \sigma(mnm^{-1}).$$

5. Anti Subgrup Fuzzy

Konsep anti subgrup fuzzy adalah konsep yang memadukan antara subgrup dengan himpunan fuzzy tetapi dengan definisi yang berbeda. Berikut penjelasannya.

Definisi 14 (Chandrasekaran & Deepica, 2019)
Misalkan N merupakan suatu grup. Suatu subset fuzzy σ dari N merupakan anti subgrup fuzzy dari N jika untuk seluruh $m, n \in N$
i. $\sigma(mn) \leq \max\{\sigma(m), \sigma(n)\}$,
ii. $\sigma(n^{-1}) \leq \sigma(n)$.

Proposisi 15 (Yasir et al., 2016)
Jika σ adalah anti subgrup fuzzy dari sebuah grup N, maka untuk seluruh $x \in N$:
i. $\sigma(e) \leq \sigma(x)$,
ii. $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)$.

Definisi 16 (Onasanya, 2016)
Misalkan σ adalah anti subgrup fuzzy dari Grup N dan $a, b \in N$
i. Koset kiri anti fuzzy dari σ dinotasikan $a\sigma$ didefinisikan dengan $(a\sigma)x = \sigma(a^{-1}x)$ untuk seluruh $x \in N$.
ii. Koset kanan anti fuzzy dari σ dinotasikan σa didefinisikan dengan $(\sigma a)x = \sigma(xa^{-1})$ untuk seluruh $x \in N$.
iii. Koset tengah anti fuzzy dari σ dinotasikan $a\sigma b$ didefinisikan dengan $(a\sigma b)x = \sigma(a^{-1}xb^{-1})$ untuk seluruh $x \in N$.

Teorema 17 (Gayen et al., 2021)
Misalkan N merupakan suatu grup Jika σ merupakan suatu subgrup fuzzy dari grup N, maka σ^c merupakan suatu anti subgrup fuzzy dari grup N.

Teorema 18 (Gayen et al., 2021)
Misalkan N merupakan suatu grup Jika σ merupakan suatu anti subgrup fuzzy dari grup N, maka σ^c merupakan suatu subgrup fuzzy dari grup N.

Definisi 19 (Onasanya, 2016)
Misalkan σ merupakan suatu anti subgrup fuzzy dari grup N sehingga σ disebut anti subgrup normal fuzzy adalah jika untuk seluruh $m, n \in N$ memenuhi

$$\sigma(m) = \sigma(mnm^{-1}).$$

Definisi 20 (Onasanya, 2016)
Misalkan M merupakan suatu grup. Normalizer dari anti fuzzy subgrup σ didefinisikan dengan

$$N(\sigma) = \{a \in M : \sigma(axa^{-1}) = \sigma(x)\}$$

untuk seluruh $x \in M$.

METODE PENELITIAN

Adapun langkah-langkah penulisan dalam prosedur penelitian:

1. Menjelaskan definisi dan teorema serta pembuktiannya mengenai konsep yang akan mendukung pembahasan, di antaranya Fungsi, Himpunan, Relasi, Grup, Himpunan Fuzzy, Subgrup Fuzzy, dan Anti Subgrup Fuzzy.
2. Membuktikan dan menyelidiki keterkaitan antara subgrup dan anti subgrup fuzzy.
3. Membuktikan dan menyelidiki keterkaitan antara subgrup dan anti subgrup normal fuzzy.
4. Membuktikan dan menyelidiki keterkaitan antara anti subgrup normal fuzzy dengan koset tengah anti fuzzy, koset kiri anti fuzzy dan koset kanan anti fuzzy.

5. Membuktikan pada anti subgrup normal fuzzy setiap elemennya komutatif.
6. Menarik kesimpulan dari penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Sifat Subgrup dari Anti Subgrup Fuzzy

Pada konsep subgrup fuzzy dari suatu grup N didefinisikan dengan $\sigma(mn) \geq \min\{\sigma(m), \sigma(n)\}$ dan $\sigma(n^{-1}) \geq \sigma(n)$ untuk $m, n \in N$. Sedangkan untuk anti subgrup fuzzy didefinsikan dengan $\sigma(mn) \leq \max\{\sigma(m), \sigma(n)\}$ dan $\sigma(n^{-1}) \leq \sigma(n)$ untuk $m, n \in N$. Berikut diberikan contoh untuk pemahaman lebih jauh.
Diberikan $\mathbb{Z}_3 - \{0\} = \{1,2\}$ adalah sebuah grup terhadap operasi perkalian modulo 3. Didefinisikan $\sigma: \mathbb{Z}_3 - \{0\} \to [0,1]$, dengan

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & Jika\ m = 1 \\ 0{,}5 & Jika\ m = 2 \end{cases}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa σ merupakan sebuah subgrup fuzzy atas grup $\mathbb{Z}_3 - \{0\}$ berdasarkan tabel berikut

Tabel 1. Tabel cayley dari $\mathbb{Z}_3 - \{0\}$ terhadap perkalian modulo 3

$\cdot$	1	2
1	1	2
2	2	1

untuk seluruh $m, n \in \mathbb{Z}_3 - \{0\}$, $\sigma(mn) \geq min(\sigma(m), \sigma(n))$, diperoleh
Untuk $m = 1$ dan $n = 1$

$$\sigma(mn) = \sigma((1)(1)) = \sigma(1) = 1 = min((1), (1)) = min(\sigma(1), \sigma(1))$$
$$= min(\sigma(m), \sigma(n)).$$

Untuk $m = 1$ dan $n = 2$

$$\sigma(mn) = \sigma((1)(2)) = \sigma(2) = 0{,}5 = min((1), (0{,}5)) = min(\sigma(1), \sigma(2))$$
$$= min(\sigma(m), \sigma(n)).$$

Untuk $m = 2$ dan $n = 1$

$$\sigma(mn) = \sigma((2)(1)) = \sigma(2) = 0{,}5 = min((0{,}5), (1)) = min(\sigma(2), \sigma(1))$$
$$= min(\sigma(m), \sigma(n)).$$

Untuk $m = 2$ dan $n = 2$

$$\sigma(mn) = \sigma((2)(2)) = \sigma(1) = 1 > min((0{,}5), (0{,}5)) = min(\sigma(2), \sigma(2))$$
$$= min(\sigma(m), \sigma(n)).$$

Selanjutnya, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}_3 - \{0\}$, $\sigma(n^{-1}) \geq \sigma(n)$, diperoleh
Untuk $n = 1$

$$\sigma((1)^{-1}) = \sigma(1) = 1 = \sigma(1) = 1.$$

Untuk $n = 2$

$$\sigma((2)^{-1}) = \sigma(2) = 0{,}5 = \sigma(2) = 0{,}5.$$

Jadi, σ merupakan subgrup fuzzy dan berdasarkan Teorema 17 sehingga σ^c adalah anti subgrup fuzzy dapat ditunjukkan secara analog.
Selanjutnya di bagian berikut ini akan membahas mengenai hubungan antara definisi subgrup dengan anti subgrup fuzzy.

Teorema 4.1.1

Misalkan N merupakan suatu grup jika σ merupakan suatu subgrup fuzzy dari grup N, maka

$$N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$$

merupakan suatu subgrup dari N.

Bukti:

Misalkan σ merupakan subgrup fuzzy dari sebuah grup N. Selanjutnya, Akan ditunjukkan bukti bahwa $N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$ merupakan suatu subgrup dari N.
Diketahui dari $N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$ sehingga sifat anggotanya memenuhi kondisi $N_{\sigma^c} \subseteq N$. Diketahui N grup diperoleh hasil $\sigma^c(e) = \sigma^c(e)$, sehingga berdasarkan sifat dari anggota di N_{σ^c} diperoleh hasil $e \in N_{\sigma^c}$. Akibatnya, $N_{\sigma^c} \neq \emptyset$.
Selanjutnya, akan diambil sebarang $m, n \in N_{\sigma^c}$, diketahui σ subgrup fuzzy sehingga didasari oleh sifat dari Definisi 8 dan Definisi 14 (i) diperoleh

$$\begin{aligned}
\sigma^c(mn) = 1 - \sigma(mn) &\leq 1 - \min\{\sigma(m), \sigma(n)\} \\
&= \max\{(1 - \sigma(m)), (1 - \sigma(n))\} \\
&= \max\{\sigma^c(m), \sigma^c(n)\} \\
&= \max\{\sigma^c(e), \sigma^c(e)\} \\
&= \sigma^c(e)
\end{aligned}$$

Akibatnya, didasari oleh sifat dari Teorema 17 diperoleh σ^c merupakan suatu anti subgrup fuzzy. Selanjutnya, didasari oleh sifat dari Proposisi 15 (i) diperoleh $\sigma^c(mn) \geq \sigma^c(e)$ sehingga akibatnya $\sigma^c(mn) = \sigma^c(e)$.
Lalu, didasari oleh sifat dari Proposisi 11 (ii) diperoleh $\sigma(n^{-1}) = \sigma(n)$ sehingga

$$\sigma^c(n^{-1}) = 1 - \sigma(n^{-1}) = 1 - \sigma(n) = \sigma^c(n) = \sigma^c(e)$$

Akibatnya, $mn \in N_{\sigma^c}$ dan $n^{-1} \in N_{\sigma^c}$
Oleh sebab itu, akibat dari $mn \in N_{\sigma^c}$ dan $n^{-1} \in N_{\sigma^c}$ didasari oleh sifat dari Teorema 2.2.6 N_{σ^c} merupakan suatu subgrup dari N. ∎

Teorema 4.1.2

Misalkan N merupakan suatu grup jika σ merupakan suatu anti subgrup fuzzy dari grup N, maka

$$N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$$

merupakan suatu subgrup dari N.

Bukti:

Misalkan σ merupakan anti subgrup fuzzy dari sebuah grup N. Selanjutnya, Akan ditunjukkan bukti bahwa $N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$ merupakan suatu subgrup dari N.
Diketahui dari $N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$ sehingga sifat anggotanya memenuhi kondisi $N_{\sigma^c} \subseteq N$. Diketahui N grup diperoleh hasil $\sigma^c(e) = \sigma^c(e)$, sehingga berdasarkan sifat dari anggota di N_{σ^c} diperoleh hasil $e \in N_{\sigma^c}$. Akibatnya, $N_{\sigma^c} \neq \emptyset$.
Selanjutnya, akan diambil sebarang $m, n \in N_{\sigma^c}$, diketahui σ anti subgrup fuzzy sehingga didasari oleh sifat dari Definisi 8 dan Definisi 14 (i) diperoleh

$$\begin{aligned}\sigma^c(mn) = 1 - \sigma(mn) &\geq 1 - \max\{\sigma(m), \sigma(n)\} \\ &= \min\{(1 - \sigma(m)), (1 - \sigma(n))\} \\ &= \min\{\sigma^c(m), \sigma^c(n)\} \\ &= \min\{\sigma^c(e), \sigma^c(e)\} \\ &= \sigma^c(e)\end{aligned}$$

Akibatnya, didasari oleh sifat dari Teorema 18 diperoleh σ^c merupakan suatu subgrup fuzzy. Selanjutnya, didasari oleh sifat dari Proposisi 11 (i) diperoleh $\sigma^c(mn) \leq \sigma^c(e)$ sehingga akibatnya $\sigma^c(mn) = \sigma^c(e)$.
Lalu, didasari oleh sifat dari Proposisi 15 (ii) diperoleh $\sigma(z^{-1}) = \sigma(z)$ sehingga

$$\sigma^c(n^{-1}) = 1 - \sigma(n^{-1}) = 1 - \sigma(n) = \sigma^c(n) = \sigma^c(e)$$

Akibatnya, $mn \in N_{\sigma^c}$ dan $n^{-1} \in N_{\sigma^c}$.
Oleh sebab itu, akibat dari $mn \in N_{\sigma^c}$ dan $n^{-1} \in N_{\sigma^c}$ didasari oleh sifat dari Teorema 2.2.6 N_{σ^c} merupakan suatu subgrup dari N. ■
Berikut diberikan teorema mengenai subset dari anti subgrup fuzzy

Teorema 4.1.3
Diketahui ω dan σ merupakan anti subgrup fuzzy dari suatu grup N. Jika $\sigma \subseteq \omega$ dan $\omega(e) = \sigma(e)$, maka $N_{\omega^c} \subseteq N_{\sigma^c}$.

Bukti:
Misalkan ω dan σ merupakan anti subgrup fuzzy dari suatu grup N. Jika $\sigma \subseteq \nu$ dan $\nu(e) = \sigma(e)$, akan ditunjukkan bukti bahwa $N_{\omega^c} \subseteq N_{\sigma^c}$.
Karena $\sigma \subseteq \omega$ maka

$$\begin{aligned} &\sigma(n) \leq \omega(n) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \sigma(n) \geq 1 - \omega(n) \\ \Leftrightarrow\ &\sigma^c(n) \geq \omega^c(n)\end{aligned}$$

untuk $n \in N$
Selanjutnya, akan diambil sebarang $n \in N_{\omega^c}$ diperoleh

$$\omega^c(n) = \omega^c(e)$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} &\sigma^c(n) \geq \omega^c(e) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \sigma(n) \geq 1 - \omega(e) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \sigma(n) \geq 1 - \sigma(e)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma^c(n) \geq \sigma^c(e)$$

Diketahui σ anti subgrup fuzzy sehingga didasari oleh sifat dari Teorema 17 σ^c adalah subgrup fuzzy, lalu didasari oleh sifat dari Proposisi 11 (i) sehingga diperoleh

$$\sigma^c(n) \leq \sigma^c(e)$$

Akibat dari itu diperoleh $\sigma^c(n) = \sigma^c(e)$ sehingga $n \in N_{\sigma^c}$.
Oleh karena itu jika $n \in N_{\omega^c}$ maka $n \in N_{\sigma^c}$ sehingga didasari oleh sifat dari Definisi 1 (v) akibatnya $N_{\omega^c} \subseteq N_{\sigma^c}$. ■

Teorema 4.1.4

Diberikan $M \neq \emptyset$ suatu subset dari N. Jika $\sigma: M \to [0,1]$.

$$\sigma(m) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s, & m \in M \\ t, & m \notin M \end{cases}$$

untuk seluruh $m \in N$ dan $0 \leq t < s \leq 1$, maka M merupakan subgrup dari grup N jika dan hanya jika σ^c merupakan anti subgrup fuzzy dari grup N dan $N_{\sigma^c} = M$.

Bukti:

Diberikan $N \neq \emptyset$ suatu subset dari grup N. Jika $\sigma: N \to [0,1]$.

$$\sigma(m) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} s, & m \in N \\ t, & m \notin N \end{cases}$$

untuk seluruh $m \in N$ dan $0 \leq t < s \leq 1$, akan ditunjukkan bukti bahwa N merupakan subgrup dari grup N jika dan hanya jika σ^c merupakan anti subgrup fuzzy dari grup N dan $N_{\sigma^c} = M$.

($\Rightarrow$)

Diberikan σ subset fuzzy dari grup N dan M merupakan suatu subgrup dari N akan ditunjukkan bukti bahwa σ^c merupakan anti subgrup fuzzy dari grup N dan $N_{\sigma^c} = M$.

Akan diambil sebarang $m, n \in N$, karena M itu subgrup dari N sehingga akan dilakukan penyelidikan 3 kasus untuk sifat keanggotaan $m, n \in N$, yaitu :

(1) $m, n \notin N$ sehingga $\sigma(x) = t$ dan $\sigma(y) = t$ dikarenakan sifat keanggotaan ini sehingga $\sigma(xy) \geq t = \min\{t.t\} = \min\{\sigma(m), \sigma(n)\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma^c(mn) &= 1 - \sigma(mn) \\ &\leq 1 - t \\ &= \max\{(1-t), (1-t)\} \\ &= \max\{\sigma^c(m), \sigma^c(n)\} \end{aligned}$$

Akibatnya,
dikarenakan $n \notin N$ sehingga $\sigma(n^{-1}) \geq t = \sigma(x)$ diperoleh

$$\sigma^c(n^{-1}) = 1 - \sigma(n^{-1}) \leq 1 - t = \sigma^c(n)$$

(2) $m \in N$ atau $n \notin N$ sehingga $\sigma(m) = s$ atau $\sigma(n) = t$ dikarenakan sifat keanggotaan ini sehingga $\sigma(mn) \geq t = \min\{s.t\} = \min\{\sigma(m), \sigma(n)\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma^c(mn) &= 1 - \sigma(mn) \\ &\leq 1 - t \\ &= \max\{(1-s), (1-t)\} \end{aligned}$$

$$= \max\{\sigma^c(m), \sigma^c(n)\}$$

Akibatnya,
dikarenakan $n \notin N$ sehingga $\sigma(n^{-1}) \geq t = \sigma(n)$ diperoleh

$$\sigma^c(n^{-1}) = 1 - \sigma(n^{-1}) \leq 1 - t = \sigma^c(n)$$

atau,
diarenakan $n \in N$ sehingga $\sigma(n^{-1}) = s = \sigma(n)$ diperoleh

$$\sigma^c(n^{-1}) = 1 - \sigma(n^{-1}) = 1 - s = \sigma^c(n)$$

(3) $m, n \in N$ sehingga $\sigma(m) = s$ dan $\sigma(n) = s$ dikarenakan sifat keanggotaan ini sehingga $\sigma(mn) = s = \min\{s. s\} = \min\{\sigma(m), \sigma(n)\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma^c(mn) &= 1 - \sigma(mn) \\ &= 1 - s \\ &= \max\{ (1 - s), (1 - s)\} \\ &= \max\{\sigma^c(s), \sigma^c(s)\} \end{aligned}$$

Akibatnya,
dikarenakan $n \in N$ sehingga $\sigma(n^{-1}) = s = \sigma(n)$ diperoleh

$$\sigma^c(n^{-1}) = 1 - \sigma(n^{-1}) = 1 - s = \sigma^c(n)$$

Oleh sebab itu sehingga untuk seluruh $m, n \in N$, memenuhi kondisi :
$\sigma^c(mn) \leq \max\{\sigma^c(m), \sigma^c(m)\}$ dan $\sigma^c(n^{-1}) \leq \sigma^c(n)$
Akibatnya, didasari oleh sifat dari Definisi 14 σ^c merupakan anti subgrup fuzzy dari N. Misalkan M merupakan suatu subgrup dari N, akibatnya $e \in M$ sehingga

$$\begin{aligned} N_{\sigma^c} &= \{n \in N : \sigma^c(n) = \sigma^c(e)\} \\ &= \{n \in N : \sigma(n) = \sigma(e)\} \\ &= \{n \in N : \sigma(n) = s\} \\ &= \{n \in N : n \in M\} \\ &= M \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)
Misalkan σ^c adalah suatu anti subgrup fuzzy dari grup N dan $N_{\sigma^c} = M$. Akan ditunjukkan bukti bahwa M adalah subgrup dari grup N. Dikarenakan σ^c adalah anti subgrup fuzzy dan $N_{\sigma^c} = M$ sehingga didasari oleh sifat dari Teorema 18 $(\sigma^c)^c$ merupakan subgrup fuzzy. Selanjutnya, didasari oleh sifat dari Proposisi 2 sehingga diperoleh $(\sigma^c)^c = \sigma$ akibatnya σ merupakan subgrup fuzzy, Jadi, didasari oleh sifat dari Teorema 4.1.1 $N_{\sigma^c} = M$ adalah subgrup dari grup N. ■

Akibat 4.1.5

Diketahui komplemen dari fungsi karakteristik $\mathcal{L}_N$ dari suatu subset tak kosong M dari grup N merupakan anti subgrup fuzzy dari grup N dan $N_{\mathcal{L}_M^c} = M$ jika dan hanya jika M adalah suatu subgrup dari N.

Bukti:

($\Rightarrow$)
Misalkan komplemen dari fungsi karakteristik $\mathcal{L}_M$ dari subset tak kosong M dari grup N merupakan suatu anti subgrup fuzzy dari grup N dan $N_{\mathcal{L}_M^c} = M$ akan

ditunjukkan bukti bahwa M adalah subgrup dari N. Dikarenakan $\mathcal{L}_M$ merupakan fungsi karakteristik diperoleh

$$\mathcal{L}_M(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & n \in M \\ 0, & n \notin M \end{cases}$$

Akibatnya didasari oleh sifat dari Teorema 4.1.4 diperoleh M merupakan subgrup dari N

($\Leftarrow$)

Misalkan komplemen dari fungsi karakteristik $\mathcal{L}_M$ dari subset tak kosong M dari grup N. M merupakan subgrup dari N akan ditunjukkan bukti bahwa $\mathcal{L}_M^c$ merupakan anti subgrup fuzzy dan $N_{\mathcal{L}_N^c} = M$. Dikarenakan M adalah subgrup dari N dan $\mathcal{L}_M$ merupakan fungsi karakteristik dari M sehingga berdasarkan Teorema 4.1.4 diperoleh $\mathcal{L}_M^c$ merupakan anti subgrup fuzzy dan $N_{\mathcal{L}_M^c} = M$. ■

4.2 Sifat dari Anti Subgrup Normal Fuzzy

Anti subgrup normal fuzzy yang bisa didefinisikan dimana N adalah grup memenuhi $\sigma(m) = \sigma(mnm^{-1})$ untuk seluruh $m, n \in N$. Pada bagian ini akan dibahas mengenai sifat dari anti subgrup normal fuzzy.

Proposisi 4.2.1

Misalkan N merupakan suatu grup jika σ merupakan suatu subgrup normal fuzzy dari grup N, maka

$$N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$$

merupakan suatu subgrup normal dari N.

Bukti:

Misalkan σ merupakan subgrup normal fuzzy dari N. Berarti berdasarkan Definisi 19, σ adalah subgrup fuzzy dari N. Akibatnya, berdasarkan Teorema 4.1.1 N_{σ^c} adalah subgrup dari N. Selanjutnya, diambil sebarang $m \in N$ dan $n \in N_{\sigma^c}$, maka $\sigma^c(e) = \sigma^c(n)$. Karena σ merupakan subgrup normal fuzzy dari N didasari oleh sifat dari Definisi 8 sehingga

$$\sigma(mnm^{-1}) = \sigma(n) \Leftrightarrow 1 - \sigma(mnm^{-1}) = 1 - \sigma(n) \Leftrightarrow \sigma^c(mnm^{-1}) = \sigma^c(n).$$

Akibatnya

$\sigma^c(mnm^{-1}) = \sigma^c(e)$.

Oleh sebab itu, $mnm^{-1} \in N_{\sigma^c}$. Dengan kata lain, berdasarkan Definisi 6 N_{σ^c} merupakan subgrup normal dari N. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan bukti bahwa untuk anti subgrup normal fuzzy dari N adalah subgrup dari N

Proposisi 4.2.2

Misalkan N merupakan suatu grup jika σ merupakan suatu anti subgrup normal fuzzy dari grup N, maka

$$N_{\sigma^c} = \{n \in N : \sigma^c(e) = \sigma^c(n)\}$$

merupakan suatu subgrup normal dari N.

Bukti:
Misalkan σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N. Berarti berdasarkan Definisi 19, σ merupakan anti subgrup fuzzy dari N. Akibatnya, didasari oleh sifat dari Teorema 4.1.2 N_{σ^c} adalah subgrup dari N. Selanjutnya, diambil sebarang $m \in N$ dan $n \in N_{\sigma^c}$, maka $\sigma^c(e) = \sigma^c(n)$. Dikarenakan σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N maka

$$\sigma(mnm^{-1}) = \sigma(n) \Leftrightarrow 1 - \sigma(mnm^{-1}) = 1 - \sigma(n) \Leftrightarrow \sigma^c(mnm^{-1}) = \sigma^c(n).$$

Akibatnya
$\sigma^c(mnm^{-1}) = \sigma^c(e)$.
Oleh sebab itu, $mnm^{-1} \in N_{\sigma^c}$. Dengan kata lain, bedasarkan Definisi 6 N_{σ^c} adalah subgrup normal dari N. ■
Selanjutnya akan ditunjukkan bukti bahwa berlakunya sifat subset pada anti subgrup normal fuzzy.

Proposisi 4.2.3
Diketahui ω dan σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari suatu grup N. Jika $\sigma \subseteq \omega$ dan $\omega(e) = \sigma(e)$, maka $N_{\omega^c} \subseteq N_{\sigma^c}$.

Bukti:
Misalkan ω dan σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N. Berarti berdasarkan Definisi 19, ω dan σ merupakan anti subgrup fuzzy dari N. Akibatnya berdasarkan Teorema 4.1.3 diperoleh $N_{\omega^c} \subseteq N_{\sigma^c}$. ■

Proposisi 4.2.4
Misalkan N merupakan suatu grup Jika σ merupakan suatu subgrup normal fuzzy dari grup N, maka σ^c merupakan suatu anti normal subgrup fuzzy dari grup N.

Bukti:
Diketahui σ merupakan subgrup normal fuzzy dari sebuah grup N. Akan ditunjukkan bukti bahwa, σ^c merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N. Oleh karena σ subgrup normal fuzzy sehingga berdasarkan Definisi 13, σ merupakan subrup fuzzy. Selanjutnya berdasarkan Teorema 17, σ^c adalah anti subgrup fuzzy sedemikian sehingga berdasarkan Definisi 8 untuk seluruh $m, n \in N$ diperoleh

$$\begin{aligned} &\sigma(mnm^{-1}) = \sigma(n) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \sigma(mnm^{-1}) = 1 - \sigma(n) \\ \Leftrightarrow\ &\sigma^c(mnm^{-1}) = \sigma^c(n). \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan Definisi 19, σ^c merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N. ■

Proposisi 4.2.5
Misalkan N merupakan suatu grup Jika σ merupakan suatu anti subgrup normal fuzzy dari grup N, maka σ^c merupakan suatu subgrup normal fuzzy dari grup N.

Bukti:
Diketahui σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari sebuah grup N. Akan ditunjukkan bukti bahwa, σ^c merupakan subgrup normal fuzzy dari N. Oleh karena

σ anti subgrup normal fuzzy sehingga berdasarkan Definisi 19, σ merupakan anti subrup fuzzy. Selanjutnya berdasarkan Teorema 18, σ^c adalah subgrup fuzzy sedemikian sehingga berdasarkan Definisi 8 untuk seluruh $m, n \in N$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma(mnm^{-1}) &= \sigma(n) \\ \Leftrightarrow 1 - \sigma(mnm^{-1}) &= 1 - \sigma(n) \\ \Leftrightarrow \quad \sigma^c(mnm^{-1}) &= \sigma^c(n). \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan Definisi 13, σ^c merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N. ■

Akibat Proposisi 4.2.4 dan Proposisi 4.2.5 diperoleh σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari sebuah grup N, jika hanya jika σ^c merupakan subgrup normal fuzzy dari N.

4.3 Sifat dari Koset Anti Fuzzy

Koset anti fuzzy yang bisa didefinisikan dimana N adalah grup dan $a, b \in N$ memenuhi koset kiri,kanan,tengah anti fuzzy yaitu $(a\sigma)x = \sigma(a^{-1}x), (\sigma a)x = \sigma(xa^{-1}), (a\sigma b)x = \sigma(a^{-1}xb^{-1})$ berturut untuk seluruh $x \in N$. Pada bagian ini akan dibahas mengenai sifat dari koset anti fuzzy.

Teorema 4.3.1

Jika σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari grup N maka

$$(a\sigma b) = c^{-1}\sigma = \sigma c^{-1}$$

untuk seluruh $a, b \in N$ dengan $c = b^{-1}a^{-1}$.

Bukti:

Diketahui σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari grup N. Akan ditunjukkan bukti bahwa

$$(a\sigma b) = c^{-1}\sigma = \sigma c^{-1}$$

untuk seluruh $a, b \in N$ dengan $c = b^{-1}a^{-1}$.

Oleh karena σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari grup N sehingga berdasarkan Definisi 16 (iii), Definisi 19 dan Definisi 3, untuk seluruh $a, b, x \in N$ diperoleh

$$(a\sigma b)(x) = \sigma(a^{-1}xb^{-1}) = \sigma(b^{-1}a^{-1}xb^{-1}(b^{-1})^{-1}) = \sigma(b^{-1}a^{-1}x) = \sigma(cx)$$
$$(a\sigma b)(x) = \sigma(a^{-1}xb^{-1}) = \sigma(aa^{-1}xb^{-1}a^{-1}) = \sigma(xb^{-1}a^{-1}) = \sigma(xc)$$

Akibatnya, berdasarkan Definisi 16 diperoleh

$$\begin{aligned} \sigma(cx) &= \sigma(xc) \\ \Leftrightarrow \sigma((c^{-1})^{-1}x) &= \sigma(x(c^{-1})^{-1}) \\ \Leftrightarrow \quad c^{-1}\sigma(x) &= \sigma c^{-1}(x) \end{aligned}$$

Jadi diperoleh

$$(a\sigma b)(x) = (c^{-1}\sigma)(x) = (\sigma c^{-1})(x)$$

dengan kata lain, $(a\sigma b) = c^{-1}\sigma = \sigma c^{-1}$. ■

Berikut diberikan sifat komutatif anti fuzzy

Teorema 4.3.2

Jika σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari grup N maka $a\sigma b = b\sigma a$ untuk seluruh elemen $a, b \in N$.

Bukti:

Diketahui σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari grup N. Akan ditunjukkan bukti bahwa $a\sigma b = b\sigma a$ untuk seluruh elemen $a, b \in N$.

Karena σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari grup N sehingga didasari oleh sifat dari Proposisi 5, Definisi 16, Definisi 19 dan Teorema 4.3.1, untuk seluruh $a, b, x \in N$ diperoleh

$$\begin{aligned}(a\sigma b)(x) &= (\sigma c^{-1})(x)\\ &= \sigma(xc)\\ &= \sigma(xb^{-1}a^{-1})\\ &= \sigma((x^{-1})^{-1}b^{-1}a^{-1})\\ &= x^{-1}\sigma(b^{-1}a^{-1})\\ &= x^{-1}\sigma(a^{-1}b^{-1}a^{-1}(a^{-1})^{-1})\\ &= x^{-1}\sigma(a^{-1}b^{-1})\\ &= \sigma(xa^{-1}b^{-1})\\ &= \sigma(b^{-1}xa^{-1}b^{-1}(b^{-1})^{-1})\\ &= \sigma(b^{-1}xa^{-1})\\ &= b\sigma a(x)\end{aligned}$$

Jadi, $a\sigma b = b\sigma a$. ■

Berikut diberikan teorema mengenai normalizer dari anti subgrup normal fuzzy

Teorema 4.3.3

Subset fuzzy σ dari grup N adalah anti subgrup normal fuzzy jika dan hanya jika $N = N(\sigma)$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diketahui σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari N. Akan ditunjukkan bukti bahwa, $N = N(\sigma)$. Berdasarkan Definisi 20 diperoleh $N(\sigma) \subseteq N$. Selanjutnya, diambil sebarang $z \in N$. Karena σ adalah anti subgrup normal fuzzy, maka berdasarkan Definisi 19, untuk seluruh $w \in N$ berlaku

$\sigma(zwz^{-1}) = \sigma(w)$.

Akibatnya berdasarkan Definisi 20 diperoleh $z \in N(\sigma)$. Oleh karena itu berdasarkan Definisi 1 (v) diperoleh $N \subseteq N(\sigma)$. Berdasarkan hasil analisa diperoleh $N(\sigma) \subseteq N$ dan $N \subseteq N(\sigma)$, sedemikian sehingga $N = N(\sigma)$.

($\Leftarrow$)

Diketahui $N = N(\sigma)$. Akan ditunjukkan bukti bahwa, σ adalah anti subgrup normal fuzzy.

Karena $N = N(\sigma)$, berarti berdasarkan Definisi 20, untuk seluruh $a \in N$ berlaku

$$\sigma(axa^{-1}) = \sigma(x)$$

untuk seluruh $x \in N$. Akibatnya berdasarkan Definisi 19, σ adalah anti fuzzy normal. ■

Teorema 4.3.4

Misalkan N adalah grup berorde 2. Jika $a \in N$ dan σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari N maka $a\sigma a = \sigma$.

Bukti:

Misalkan grup $N = \{e, a\}$ sedemikian sehingga

Tabel 2. Tabel cayley dari N grup berorde 2

	e	a
e	e	a
a	a	e

Berdasarkan tabel cayley invers dari a adalah dirinya sendiri yaitu a^{-1}. Akibatnya, berdasarkan Proposisi 4 diperoleh $aa = a^{-1}a^{-1} = e$. Dan diketahui σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari N. Akan ditunjukkan bukti bahwa, $a\sigma a = \sigma$ untuk seluruh $a \in N$. Oleh karena σ adalah anti subgrup normal fuzzy dari grup N berorde 2 sehingga berdasarkan Definisi 16 (iii), Definisi 19 dan Definisi 3, untuk seluruh $a, x \in N$ diperoleh

$$\begin{aligned}(a\sigma a)(x) &= \sigma(a^{-1}xa^{-1}) \\ &= \sigma(a^{-1}a^{-1}xa^{-1}(a^{-1})^{-1}) \\ &= \sigma(a^{-1}a^{-1}xe) \\ &= \sigma(exe) \\ &= \sigma(x)\end{aligned}$$

Jadi, $a\sigma a = \sigma$. ■

KESIMPULAN

Kesimpulan yang didapatkan berdasarkan hasil pembahasan dinyatakan sebagai berikut

1. (a) Jika anti subgrup fuzzy σ dari grup N maka suatu himpunan N_{σ^c} yang memuat semua $x \in N$ dengan $\sigma^c(x) = \sigma^c(e)$ merupakan subgrup dari N . Hal ini berlaku juga pada subgrup fuzzy.
   (b) Diberikan dua buah anti subgrup fuzzy σ dan ν dari grup N. Jika, $\sigma \subseteq \nu$ dan $\nu(e) = \sigma(e)$ maka $N_{\nu^c} \subseteq N_{\sigma^c}$.
   (c) Jika σ merupakan anti subgrup fuzzy dari grup N dan M subset dari N maka $N_{\sigma^c} = M$ jika dan hanya jika M adalah subgrup dari N.
2. (a) Jika anti subgrup normal fuzzy σ dari grup N maka himpunan N_{σ^c} yang memuat semua $x \in N$ dengan $\sigma^c(x) = \sigma^c(e)$ merupakan subgrup dari N . Hal ini berlaku juga pada subgrup normal fuzzy.
   (b) Diberikan dua buah anti subgrup normal fuzzy σ dan ν dari grup N. Jika, $\sigma \subseteq \nu$ dan $\nu(e) = \sigma(e)$ maka $N_{\nu^c} \subseteq N_{\sigma^c}$.

(c) subset fuzzy σ dari grup N merupakan anti subgrup normal fuzzy dari grup N jika dan hanya jika σ^c merupakan subgrup normal fuzzy.
(d) Jika σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari grup N maka $(a\sigma b) = c^{-1}\sigma = \sigma c^{-1}$ untuk seluruh $a, b \in N$ dengan $c = b^{-1}a^{-1}$.
(e) Jika σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari grup N maka $a\sigma b = b\sigma a$ untuk seluruh $a, b \in N$.
(f) Subset fuzzy σ dari grup N merupakan anti subgrup normal fuzzy jika dan hanya jika $N = N(\sigma)$.
(g) Pada grup N berorde 2 diperoleh jika σ merupakan anti subgrup normal fuzzy dari N maka $a\sigma a = \sigma$ untuk seluruh $a \in N$.

REFERENSI

Abdi, M., Sukarna, & Abubakar, R. (2018). Suatu Kajian Tentang Grup Fuzzy. *Journal of Mathematics Computations and Statistics*, *1*(1), 78–84. https://doi.org/https://doi.org/10.35580/jmathcos.v1i1.9181

Abdurrahman, S. (2022). *Pengantar Struktur Aljabar : Teori Grup*. Kalam Emas.

Barnard, T., & Neill, H. (2017). *Discovering Group Theory A Transition to Advanced Mathematics* (1st ed.). Taylor & Francis Group, LLC.

Chandrasekaran, S., & Deepica, N. (2019). Relation between Fuzzy Subgroups & Anti-Fuzzy Subgroups. *IJIRST –International Journal for Innovative Research in Science & Technology*, *5*(9), 1–5.

Ford, T. J. (2020). Groups. In *Introduction to Abstract Algebra* (pp. 1–325). Department of Mathematics, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL 33431.

Gayen, S., Jha, S., Singh, M., & Prasad, A. (2021). On anti-fuzzy subgroup. *Yugoslav Journal of Operations Research*, *31*(4), 539–546. https://doi.org/10.2298/YJOR200717043G

Jezewski, M., Czabanski, R., & Leski, J. (2017). Introduction to Fuzzy Sets. In *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers* (pp. 3–22). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-319-59614-3

Onasanya, B. (2016). Review of some anti fuzzy properties of some fuzzy subgroups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, *11*(6), 899–904. http://www.afmi.or.kr/2016-Vol-11-No-06.htm

Onasanya, B., & Ilori, S. (2014). Some Results in Fuzzy and Anti Fuzzy Group Theory. *International Journal Of Mathematical Combinatorics*, *1*(3), 1–5.

Yasir, A., Abdurrahman, S., & Huda, N. (2016). Fuzzy Anti Subgrup. *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, *10*(2), 48–54. https://doi.org/https://doi.org/10.20527/epsilon.v10i2.37