Jurnal Matematika Murni dan Terapan "$\varepsilon psilon$"
Vol. 07, No.01, (2013), Hal. 45 – 52

ESTIMASI PARAMETER UNTUK DISTRIBUSI HALF LOGISTIK

Rizqi Elmuna Hidayah[1], Nur Salam[2] dan Dewi Sri Susanti[3]

[1,2,3] *Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*
Jl. A. Yani Km. 36 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
E-mail: rizqi@gmail.com

Abstrak. Estimasi titik adalah suatu nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai estimator dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Untuk menentukan estimator titik dapat digunakan beberapa metode, diantaranya adalah metode Kemungkinan Maksimum Likelihood atau Maximum Likelihood Estimator (MLE) dan metode Momen atau Method of Momen Estimator (MME). Distribusi half logistik digunakan untuk data masa hidup yang merupakan data masa hidup suatu unit atau individu pada suatu keadaan tertentu dalam hal failure time (waktu kegagalan). Jurnal ini membahas tentang estimasi parameter lokasi-skala untuk distribusi half logistic.

Kata Kunci : Estimasi parameter, parameter lokasi dan skala, distribusi half logistik, metode kemungkinan maksimum, metode momen.

Abstract. Point estimation is a value obtained from the samples and used as an estimator of the parameter whose value is unknown. To determine the point estimator can be used several methods, such as Maximum Likelihood Estimator (MLE) and Method of Moments Estimator (MME). Half logistic distribution is used for lifetime data such as the survival data of a unit or individual of a particular situation in terms of failure time. In this journal, several methods for estimating the location and scale parameters of the half-logistic distribution.

Keywords : Estimation of parameters, location-scale parameters, half logistic distribution, maximum Likelihood estimator, method of moments estimator.

1. Pendahuluan

Analisis data masa hidup merupakan hal penting yang mendapat perhatian di berbagai bidang, antara lain di bidang teknik mesin (engineering) dan ilmu pengetahuan biomedis. Aplikasi analisis distribusi waktu hidup berkisar pada penyelidikan daya tahan produk sampai dengan penelitian suatu penyakit. Menganalisa data masa hidup diperlukan asumsi tentang distribusi populasinya, salah satu distribusi tersebut adalah distribusi half logistik. Distribusi half logistik digunakan untuk menganalisa data masa hidup komponen dari suatu produk atau dapat diartikan sebagai probabilitas rentang waktu komponen tersebut dari awal beroperasi sampai dengan gagal atau kerusakan suatu alat untuk melakukan fungsinya secara wajar selama periode operasi yang ditentukan.

Statistika inferensi merupakan teknik pengambilan keputusan tentang suatu parameter berdasarkan sampel yang diambil dari populasi tersebut yang meliputi dua hal penting yaitu estimasi parameter dan pengujian hipotesis (Wibisono [4]). Prosedur estimasi parameter diantaranya adalah estimasi titik. Estimasi titik dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa metode, diantaranya adalah metode klasik yang meliputi Maximum Likelihood Estimator (MLE) dan Method of Momen Estimator (MME). Suatu distribusi umumnya mempunyai beberapa parameter yaitu parameter lokasi dan parameter skala. Berdasarkan penjabaran di atas, penelitian ini akan menjelaskan tentang estimasi titik untuk parameter lokasi dan parameter skala pada distribusi half logistik dengan judul ”ESTIMASI PARAMETER UNTUK DISTRIBUSI HALF LOGISTIK”.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Estimasi Parameter

Estimasi adalah pendugaan, penaksiran atau usaha menemukan setepat-tepatnya nilai dari parameter suatu populasi, karena ukuran dari parameter populasi yang ukurannya tidak berhingga sehingga terlalu besar untuk diteliti seluruhnya. Oleh karena itu, untuk menentukan nilai parameter akan digunakan nilai-nilai dari populasi tersebut (Wibisono [4]).

Secara umum, parameter populasi akan diberi simbol θ. Nilai θ bisa merupakan nilai rata-rata μ, simpangan baku σ, dan lain sebagainya. Jika θ yang tidak diketahui nilainya, diestimasi oleh nilai $\hat{\theta}$ (baca: theta topi), maka $\hat{\theta}$ dinamakan estimator. Jelas bahwa sangat dikehendaki $\hat{\theta} = \theta$ yaitu bisa menunjukkan nilai θ yang sebenarnya (Sudjana [3]).

2.2. Parameter Lokasi dan Parameter Skala

Definisi 2.1 (Bain & Engelhardt [2]). *Jika cdf dari suatu distribusi X mempunyai bentuk $F(x;\eta) = F_0(x-\eta)$ atau pdf dari suatu distribusi X mempunyai bentuk $f(x;\eta) = f_0(x-\eta)$, maka suatu nilai η disebut parameter lokasi.*

Definisi 2.2 (Bain & Engelhardt [2]). *Jika cdf dari suatu distribusi X mempunyai bentuk $F(x;\theta) = F_0\left(\frac{x}{\theta}\right)$ atau pdf dari suatu distribusi X mempunyai bentuk $f(x;\theta) = f_0\left(\frac{x}{\theta}\right)$, maka suatu nilai positif dari θ disebut parameter skala.*

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt [2]). *Jika cdf dari suatu distribusi X mempunyai bentuk* $F(x;\theta) = F_0\left(\frac{x-\theta}{\eta}\right)$ *atau pdf dari suatu distribusi X mempunyai bentuk* $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}f_0\left(\frac{x-\theta}{\eta}\right)$, *maka suatu nilai* η *dan nilai positif dari* η *disebut parameter lokasi-skala.*

2.3. Metode Maksimum Likelihood atau Maximum Likelihood Estimator (MLE)

MLE merupakan salah satu metode estimasi yang memberikan hasil yang baik dengan memaksimumkan fungsi Likelihood sesuai dengan definisi berikut:

Definisi 2.4 (Bain & Engelhardt [2]). *Jika* $L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta),\ldots f(x_n;\theta), \theta \in \Omega$ *adalah fungsi kepadatan bersama dari* $X_1, X_2, , X_n$ *dengan* Ω *adalah ruang parameter. Suatu nilai* $\hat{\theta}$ *dalam* Ω *sedemikian sehingga* $L(\theta)$ *maksimum disebut Maximum Likelihood Estimator (MLE) dari* θ *dan didefinisikan sebagai berikut:*

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \hat{\theta}\right) = \max_{\theta \in \Omega} f(x_1;\theta)f(x_2;\theta), \ldots f(x_n;\theta) \tag{1}$$

2.4. Metode Momen atau Method of Momen Estimator (MME)

Estimasi parameter menggunakan MME diperoleh dengan menyamakan momen ke-r dari suatu sampel dengan momen ke-r dari suatu populasi, yaitu:

$$M'_j = u'_j\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_r\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{2}$$

(Bain & Engelhardt [2]).

2.5. Distribusi Half Logistik

Distribusi half logistik digunakan untuk data masa hidup yang merupakan data daya tahan hidup suatu unit atau individu pada suatu keadaan tertentu dalam hal failure time (waktu kegagalan). Suatu variabel acak kontinu Y yang berdistribusi half logistik mempunyai fungsi kepadatan peluang (pdf) sebagai berikut:

$$g(y;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}}{\sigma\left(1+e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}\right)^2} & y \geq \mu \geq 0, \sigma \geq 0 \\ \dfrac{2e^{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}}{\sigma\left(1+e^{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}\right)^2} & y \geq \mu \geq 0, \sigma \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

(Asgharzadeh dkk. [1]). Sedangkan cumulative distribution function (cdf) dari distribusi half logistik, yaitu:

$$G(y;\mu,\sigma) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}}{1 + e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}} \tag{4}$$

Parameter dari distribusi half logistik dapat dilihat dari bentuk pdf dan cdf nya yaitu persamaan (3) dan persamaan (4), menurut definisi 2.1, definsi 2.2, dan definisi 2.3 maka distribusi ini mempunyai parameter lokasi-skala dengan parameter lokasi μ dan parameter skala σ.

3. Hasil dan Pembahasan

Estimasi titik untuk parameter lokasi dan parameter skala pada distribusi half logistik dilakukan dengan beberapa metode, antara lain menggunakan:

3.1. Metode Maksimum Likelihood atau Maximum Likelihood Estimator (MLE)

3.1.1 Estimasi dari μ dan σ Ketika Keduanya Tidak Diketahui

Metode ini dilakukan dengan memaksimumkan fungsi Likelihood $(L(\mu,\sigma))$, yaitu:

$$\begin{aligned} L(\mu,\sigma) &= 2^n\sigma^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\mu)}{\sigma}}\prod_{i=1}^{n}\left(1+e^{-\frac{(y_i-\mu)}{\sigma}}\right)^{-2} \\ \ln L(\mu,\sigma) &= n\ln 2 - n\ln\sigma - \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu) - 2\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+e^{-\frac{(y_i-\mu)}{\sigma}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

1. Mendeferensialkan persamaan (5) terhadap μ

$$\frac{\ln L(\mu,\sigma)}{\partial\mu} = \left(-\frac{1}{\sigma}\right)\cdot(-n) - \left(\frac{2}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)}}{1+e^{-\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)}}\right)$$

Pada saat $\frac{\ln L(\mu,\sigma)}{\partial\mu} = 0$ akan diperoleh

$$0 = n - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)}}{1+e^{-\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)}}\right)$$

Fungsi Likelihood akan maksimum jika μ minimum, nilai μ minimum diperoleh pada saat $y_{1:n}$ atau nilai data terkecil (Asgharzadeh dkk., 2011), sehingga estimasi dengan menggunakan MLE untuk parameter μ, yaitu:

$$\hat{\mu} = y_{1:n} \tag{6}$$

2. Mendeferensialkan persamaan (5) terhadap σ

$$\frac{\ln L(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu) - \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)}\cdot(y_i-\mu)}{1+e^{-\left(\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right)}}$$

Pada saat $\frac{\ln L(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} = 0$ akan diperoleh :

$$\hat{\sigma} = \bar{y} - \hat{\mu} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\left(\frac{y_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)} \cdot (y_i - \hat{\mu})}{1 + e^{-\left(\frac{y_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}} \tag{7}$$

karena persamaan (7) tidak dapat diselesaikan secara trivial maka diselesaikan dengan prosedur iterasi dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (7) kemudian diperoleh suatu solusi titik tetap sebagai estimasi untuk parameter σ yaitu:

$$h(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma} \tag{8}$$

$$h(\hat{\sigma}) = \bar{y} - y_{1:n} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\left(\frac{y_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)} \cdot (y_i - y_{1:n})}{1 + e^{-\left(\frac{y_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}} \tag{9}$$

dengan prosedur iterasi sebagai berikut:

$$h(\hat{\sigma}^{(j)}) = \hat{\sigma}^{(j+1)} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$\hat{\sigma}^{(1)}$ adalah nilai awal yang diberikan.

3.1.2 Estimasi dari σ Ketika Parameter Lokasi μ Diketahui

Estimasi dari parameter skala (σ) pada saat parameter lokasi diketahui (misal $\mu = 0$) disubstitusikan ke persamaan (5) sehingga diperoleh:

$$U(\sigma) = n\ln 2 - n\ln\sigma - \frac{1}{\sigma}\sum\_i = 1^n y_i - 2\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + e^{-\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)}\right) \tag{10}$$

Fungsi likelihood persamaan (10) dimaksimumkan sehingga diperoleh:

$$\hat{\sigma} = \bar{y} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i \cdot e^{-\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)}}{\left(1 + e^{-\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)}\right)} \tag{11}$$

karena persamaan (11) tidak dapat diselesaikan secara trivial maka diselesaikan dengan prosedur iterasi, sehingga diperoleh estimasi untuk parameter σ yaitu:

$$v(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma} \tag{12}$$

$$v(\hat{\sigma}) = \bar{y} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i \cdot e^{-\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right)}}{\left(1 + e^{-\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right)}\right)} \tag{13}$$

dengan prosedur iterasi sebagai berikut:

$$v(\hat{\sigma}^{(j)}) = \hat{\sigma}^{(j+1)} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$\hat{\sigma}^1$ adalah nilai awal yang diberikan

3.2. Metode Momen atau Method of Momen Estimator (MME)

Nilai harapan suatu variabel acak Y yang berdistribusi $HL(\mu, \sigma)$ dapat diperoleh dengan memisalkan $X = \frac{(Y-\mu)}{\sigma}$ dan mengikuti pdf distribusi logistik, sehingga diperoleh:

$$E(X) = \ln 4 \tag{14}$$

$$E(X^2) = \frac{\pi^2}{3} \tag{15}$$

3.2.1 Estimasi dari μ dan σ Ketika Keduanya Tidak Diketahui

Suatu variabel acak kontinu Y yang berdistribusi $HL(\mu, \sigma)$ dengan memisalkan $X = \frac{(Y-\mu)}{\sigma}$ sehingga diperoleh $Y = \mu + \sigma X$. Momen ke-1 dari suatu populasi, yaitu:

$$\begin{aligned} \mu_1' = E(Y) &= E(\mu + \sigma X) \\ &= E(\mu) + E(\sigma X) \\ &= \hat{\mu} + \hat{\sigma} E(X) \\ &= \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln 4 \end{aligned} \tag{16}$$

Sedangkan untuk momen ke-1 dari suatu sampel dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M_1' = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^1}{n} = \bar{y} \tag{17}$$

Berdasarkan persamaan (2) estimasi parameter menggunakan MME diperoleh dengan menyamakan momen ke-1 dari suatu sampel (persamaan (17)) dan momen ke-1 dari suatu populasi (persamaan (16)), diperoleh:

$$\begin{aligned} M_1' &= \mu_1' \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^1}{n} &= \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln 4 \\ \bar{y} &= \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln 4 && (18) \\ \hat{\mu} &= \bar{y} - \hat{\sigma} \ln 4 && (19) \end{aligned}$$

Momen ke-2 dari suatu populasi, yaitu:

$$\begin{aligned} \mu_2' = E(Y^2) &= E(\mu + \sigma X)^2 \\ &= E(\mu^2) + E(2\mu\sigma X) + E(\sigma^2 X^2) \\ &= E(\mu^2) + 2\mu\sigma E(X) + E(X^2)\sigma^2 \\ &= \hat{\mu}^2 + 2\hat{\mu}\hat{\sigma} \ln 4 + \hat{\sigma}^2 \frac{\pi^2}{3} \end{aligned} \tag{20}$$

Sedangkan untuk momen ke-2 dari suatu sampel dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M_2' = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{n} = \overline{y^2} \tag{21}$$

Berdasarkan persamaan (2) estimasi parameter menggunakan MME diperoleh dengan menyamakan momen ke-2 dari suatu sampel (persamaan (21)) dan momen ke-2 dari suatu populasi (persamaan (20)), yaitu:

$$\begin{aligned} M_2' &= \mu_2' \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{n} &= \hat{\mu}^2 + 2\hat{\mu}\hat{\sigma}\ln 4 + \hat{\sigma}^2\frac{\pi^2}{3} \\ \overline{y^2} &= \hat{\mu}^2 + 2\hat{\mu}\hat{\sigma}\ln 4 + \hat{\sigma}^2\frac{\pi^2}{3} \\ \overline{y^2} - \hat{\sigma}^2\frac{\pi^2}{3} &= (\hat{\mu} + \hat{\sigma}\ln 4)^2 - \hat{\sigma}^2(\ln 4)^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Persamaan (18) disubstitusikan ke persamaan (22), diperoleh:

$$\begin{aligned} \overline{y^2} - \hat{\sigma}^2\frac{\pi^2}{3} &= (\bar{y})^2 - \hat{\sigma}^2(\ln 4)^2 \\ \overline{y^2} - \bar{y}^2 &= \hat{\sigma}^2\left(\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2\right) \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\left(\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2\right)}} \end{aligned} \tag{23}$$

Persamaan (23) disubstitusikan ke persamaan (19) untuk memperoleh estimator μ, yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{y} - \hat{\sigma}\ln 4 \\ \hat{\mu} &= \bar{y} - \ln 4\sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\left(\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2\right)}} \end{aligned} \tag{24}$$

3.2.2 Estimasi dari σ Ketika Parameter Lokasi μ Diketahui

Estimasi parameter pada distribusi half logistik dengan menggunakan MME untuk parameter σ ketika parameter lokasi μ diketahui, yaitu: Berdasarkan persamaan (19) diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{y} - \hat{\sigma}\ln 4 \\ \hat{\sigma} &= \frac{\bar{y} - \hat{\mu}}{\ln 4} \end{aligned} \tag{25}$$

4. Kesimpulan

Hasil Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian tentang estimasi parameter untuk distribusi half logistik, yaitu: saat μ dan σ tidak diketahui dengan MLE adalah

$$\hat{\mu} = y_{1:n} \qquad \text{dan} \qquad \hat{\sigma} = \bar{y} - y_{1:n} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y_{1:n}) \cdot e^{-\frac{(y_i - y_{1:n})}{\sigma}}}{\left(1 + e^{-\frac{(y_i - y_{1:n})}{\sigma}}\right)}$$

dengan MME adalah

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\left(\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2\right)}} \qquad \text{dan} \qquad \hat{\mu} = \bar{y} - \ln 4\sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\left(\frac{\pi^2}{3} - (\ln 4)^2\right)}}$$

Sedangkan saat μ diketahui dengan MLE diketahui ($\mu = 0$) adalah

$$\hat{\sigma} = \bar{y} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i \cdot e^{-\frac{y_i}{\sigma}}}{\left(1 + e^{-\frac{y_i}{\sigma}}\right)}$$

dengan MME adalah

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{y} - \mu}{\ln 4}$$

Daftar Pustaka

[1] Asgharzadeh, A., Rezaie, R., dan Abdi, M. 2011. *Comparison of methods for the half-Logistic distribution*. Selcuk Journal of Applied Mathemtics.

[2] Bain, L.J., dan Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Edisi-2. PT Belmont Company, California.

[3] Sudjana. 2000. *Metode Statistika*. Tarsito, Bandung.

[4] Wibisono, Y. 2005. *Metode Statistik*. Gadjah Mada University Press. Yogyakarta.