

KONPLEMEN IDEAL FUZZY DARI NEAR-RING

Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

Jl. Jend. A. Yani km 36 Banjarbaru

E-mail: saman@unlam.ac.id

ABSTRAK

Dalam tulisan ini diperkenalkan konsep konplemen dari ideal fuzzy near-ring dan anti ideal fuzzy near-ring, dan hubungan antara ideal fuzzy near-ring dan konplemenya. Hasil dari penelitian ini adalah jika α adalah ideal fuzzy dari near-ring, maka α^c adalah anti ideal fuzzy dari near-ring, dan juga berlaku sebaliknya

Kata kunci: ideal fuzzy, konplemen ideal fuzzy, anti ideal fuzzy

1. PENDAHULUAN

Penelitian terkait dengan struktur aljabar fuzzy telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya Abou-Zaid [1] memperkenalkan konsep subnear-ring fuzzy. Menurut Satyanarayana *at al* [6], near-ring merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa aksioma yang ada pada ring tidak harus diberlakukan pada near-ring. Operasi pertama pada near-ring sebarang tidak harus abelian, dan terhadap operasi pertama dan kedua, cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan.

Banyak peneliti yang melanjutkan penelitian dari Abou-Zaid, diantaranya: Kim *at al* [4] memperkenalkan konsep anti ideal fuzzy near-ring, dan Abdurrahman *at al* [2] memperkenalkan konsep ideal fuzzy near-ring. Pada penelitian ini, akan disajikan hasil kajian teori mengenai konplemen dari ideal fuzzy dan hubungan antara ideal fuzzy dan konplemenya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini, disajikan definisi dan sifat dari near-ring dan himpunan fuzzy yang digunakan pada pembahasan.

Definisi 2.1. [6] Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ disebut near ring, jika memenuhi:

- (1) $(R, +)$ adalah grup (tidak harus grup abelian),
- (2) $(R, \cdot)$ adalah semigrup,
- (3) untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri
 - (i). distributif kanan : $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
 - (ii). distributif kiri : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Suatu near-ring disebut near-ring kanan jika memenuhi aksioma (1), (2), dan (3) bagian (i), dan disebut near-ring kiri jika memenuhi aksioma (1), (2), dan (3)

bagian (ii). Selanjutnya yang dimaksud *near-ring* adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut, dan $x \cdot y$ dapat juga ditulis xy .

Pada *near-ring*, grupnya tidak harus abelian terhadap operasi $+$, maka dalam mendefinisikan ideal, subgrupnya harus merupakan subgrup normal.

Definisi 2.2. [6] Diberikan *near-ring* R . Subgrup normal I dari R disebut ideal dari R , jika

- (1). $RI \subseteq I$
- (2). $(r + i)s - rs \in I$ untuk setiap $r, s \in R$ dan $i \in I$.

Subgrup normal I dari R , memenuhi kondisi (1) disebut *ideal kiri* dari R , dan memenuhi kondisi (2) disebut *ideal kanan* dari R .

Definisi 2.3. [5] Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan α disebut subset fuzzy dari X jika $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$. Selanjutnya himpunan semua subset fuzzy dari X dinotasikan dengan $\mathbb{F}(X)$.

Definisi 2.4. [4] Diberikan $\alpha \in \mathbb{F}(X)$ dan $t \in [0, 1]$. Himpunan

$$\alpha_t^U := \{x \in X | \alpha(x) \geq t\}, \text{ dan } \alpha_t^L := \{x \in X | \alpha(x) \leq t\}$$

disebut *upper t-level cut* dari α , dan *lower t-level cut* dari α .

Definisi 2.5. [3] Diberikan *near-ring* R dan $\alpha \in \mathbb{F}(R)$. Subset fuzzy α disebut *subnear-ring fuzzy* dari R jika $\alpha(x - y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$, dan $\alpha(xy) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ untuk setiap $x, y \in R$.

Definisi 2.6. [3] Diberikan *near-ring* R dan $\alpha \in \mathbb{F}(R)$. Subset fuzzy α disebut ideal fuzzy dari R , jika untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

- (1) $\alpha(x - y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$,
- (2) $\alpha(x) = \alpha(y + x - y)$,
- (3) $\alpha(xy) \geq \alpha(y)$, dan
- (4) $\alpha((x + z)y - xy) \geq \alpha(z)$.

Subset fuzzy α disebut *ideal kiri fuzzy* dari R jika memenuhi kondisi (1), (2), dan (3), sedangkan α disebut *ideal kanan fuzzy* dari R jika memenuhi kondisi (1), (2), dan (4).

Definisi 2.7. [4] Diberikan *near-ring* R dan $\alpha \in \mathbb{F}(R)$. Subset fuzzy α disebut *anti subnear-ring fuzzy* dari R jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku:

- (1) $\alpha(x - y) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$, dan
- (2) $\alpha(xy) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$.

Selanjutnya, α disebut *anti ideal fuzzy* dari R jika α adalah *anti subnear-ring fuzzy* dari R dan untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

- (3) $\alpha(x) = \alpha(y + x - y)$,
- (4) $\alpha(xy) \leq \alpha(y)$, dan
- (5) $\alpha[(x + z)y - xy] \leq \alpha(z)$.

Suatu α disebut *anti ideal kiri fuzzy* dari R jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (4), sedangkan α disebut *anti ideal kanan fuzzy* dari R jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (5).

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan tulisan mengenai *near-ring*, *ideal near-ring*, *near-ring fuzzy*, *ideal fuzzy near-ring* dan *anti ideal fuzzy near-ring*.

Pada tahap awal dipelajari tentang konsep dasar dari *ideal fuzzy near-ring*, dan *anti ideal fuzzy near-ring*. Konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu pada saat mengkonstruksi sifat konplemen dari *ideal fuzzy near-ring*.

Selanjutnya, dibuktikan beberapa lemma/teorema yang terkait dan ditentukan asumsi-asumsi sehingga terbentuk sifat-sifat baru dari *ideal fuzzy near-ring* yang berkaitan dengan konplemenya, dan sifat-sifat baru tersebut akan dibuktikan atau dikaji kebenarannya pada pembahasan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Lemma 4.1. *Diberikan near-ring R . Jika α adalah subnear-ring fuzzy dari R , maka untuk setiap $x \in R$*

$$\alpha^c(0_R) \leq \alpha^c(x), \text{ dan } \alpha^c(-x) = \alpha^c(x).$$

Bukti:

Diambil sebarang $x \in R$, maka menurut Abdurrahman ([2], Lemma 4.1.4) berlaku:

$$\alpha^c(0_R) \leq 1 - \alpha(x) = \alpha^c(x), \text{ dan } \alpha^c(-x) = 1 - \alpha(-x) = \alpha^c(x). \blacksquare$$

Akibat 4.2. *Jika α adalah subnear-ring fuzzy dari R , maka $\{x \in R | \alpha^c(x) = \alpha^c(0_R)\}$ adalah subnear-ring dari R .*

Bukti:

Misalkan $A = \{x \in R | \alpha^c(x) = \alpha^c(0_R)\}$, maka menurut sifat keanggotaan A , $0_R \in A$ dan $A \subseteq R$ yang mengakibatkan $A \neq \emptyset$.

Diambil sebarang $x, y \in A$, maka $\alpha^c(x) = \alpha^c(y) = \alpha^c(0_R)$. Selajutnya:

$$\begin{aligned} \alpha^c(x - y) &= 1 - \alpha(x - y) \leq 1 - \min\{\alpha(x), \alpha(y)\} \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\} \\ &= \max\{\alpha(0_R), \alpha(0_R)\} = \alpha(0_R) \Leftrightarrow \alpha^c(x - y) \leq \alpha(0_R), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \alpha^c(xy) &= 1 - \alpha(xy) \leq 1 - \min\{\alpha(x), \alpha(y)\} \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\} \\ &= \max\{\alpha(0_R), \alpha(0_R)\} = \alpha(0_R) \Leftrightarrow \alpha^c(xy) \leq \alpha(0_R). \end{aligned}$$

Mengingat $\alpha^c(x - y) \leq \alpha(0_R)$, dan $\alpha^c(xy) \leq \alpha(0_R)$, maka menurut Lemma 4.1, $\alpha^c(x - y) = \alpha^c(xy) = \alpha(0_R)$, sehingga $x - y, xy \in A$, dengan kata lain A adalah *subnear-ring* dari R . $\blacksquare$

Lemma 4.3. *Jika α adalah subnear-ring fuzzy dari near-ring R , maka untuk setiap $x, y \in R$ berlaku:*

- (1) $\alpha^c(x + y) = \alpha^c(y + x)$, dan
- (2) $\alpha^c(x - y) = \alpha^c(0_R)$ maka $\alpha^c(x) = \alpha^c(y)$.

Lemma 4.4. *Diberikan α adalah ideal fuzzy dari near-ring R dan $x \in R$. Untuk setiap $y \in R$, $\alpha^c(x - y) = \alpha^c(y)$ jika dan hanya jika $\alpha^c(x) = \alpha^c(0_R)$.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan α adalah ideal fuzzy dari *near-ring* R , $x \in R$, dan untuk setiap $y \in R$, berlaku $\alpha^c(x - y) = \alpha^c(y)$. Akibatnya $\alpha^c(x - 0_R) = \alpha^c(0_R) \Leftrightarrow \alpha^c(x) = \alpha^c(0_R)$.

($\Leftarrow$) Misalkan α adalah ideal fuzzy dari *near-ring* R , dan $\alpha^c(x) = \alpha^c(0_R)$ untuk suatu $x \in R$. Diambil sebarang $y \in R$, maka menurut Lemma 4.1,

$$\begin{aligned}\alpha^c(x - y) &= 1 - \alpha(x - y) \leq 1 - \min\{\alpha(x), \alpha(y)\} = \min\{1 - \alpha(x), 1 - \alpha(y)\} \\ &= \min\{\alpha^c(x), \alpha^c(y)\} \leq \max\{\alpha^c(x), \alpha^c(y)\} = \alpha^c(y) \Leftrightarrow \alpha^c(x - y) \leq \alpha^c(y). \\ \alpha^c(y) &= \alpha^c(0_R - y) = \alpha^c(-x + x - y) = 1 - \alpha(-x + x - y) \\ &\leq 1 - \min\{\alpha(-x), \alpha(x - y)\} = \min\{1 - \alpha(x), 1 - \alpha(x - y)\} \\ &= \min\{\alpha^c(x), \alpha^c(x - y)\} \leq \max\{\alpha^c(x), \alpha^c(x - y)\} \\ &= \alpha^c(x - y) \Leftrightarrow \alpha^c(y) \leq \alpha^c(x - y)\end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan analisa di atas: $\alpha^c(x - y) = \alpha^c(y)$ untuk setiap $y \in R$. ■

Teorema 4.5. Diberikan *near-ring* R . Subset fuzzy α adalah ideal fuzzy dari R jika dan hanya jika α^c adalah anti ideal fuzzy dari R .

Bukti:

($\Rightarrow$) Mengingat α adalah ideal fuzzy dari R , maka untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

$$\begin{aligned}\alpha^c(x - y) &= 1 - \alpha(x - y) \leq 1 - \min\{\mu(\alpha), \mu(\alpha)\} = \min\{1 - \alpha(x), 1 - \alpha(y)\} \\ &= \min\{\alpha^c(x), \alpha^c(y)\} \leq \max\{\alpha^c(x), \alpha^c(y)\}, \\ \alpha^c(y + x - y) &= 1 - \alpha(y + x - y) = 1 - \alpha(x) = \alpha^c(x), \\ \alpha^c(xy) &= 1 - \alpha(xy) \leq 1 - \alpha(y) = \alpha^c(y), \text{ dan} \\ \alpha^c[(x + z)y - xy] &= 1 - \alpha[(x + z)y - xy] \leq 1 - \alpha(z) = \alpha^c(z).\end{aligned}$$

Berdasarkan analisa di atas, maka α^c adalah anti ideal fuzzy dari R .

($\Leftarrow$) Mengingat α^c adalah anti ideal fuzzy dari R , maka untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

$$\begin{aligned}\alpha(x - y) &= 1 - \alpha^c(x - y) \geq 1 - \max\{\alpha^c(x), \alpha^c(y)\} = \max\{1 - \alpha^c(x), 1 - \alpha^c(y)\} \\ &= \max\{\alpha(x), \alpha(y)\} \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}, \\ \alpha(y + x - y) &= 1 - \alpha^c(y + x - y) = 1 - \alpha^c(x) = \mu(x), \\ \alpha(xy) &= 1 - \alpha^c(xy) \geq 1 - \alpha^c(y) = \alpha(y), \text{ dan} \\ \alpha[(x + z)y - xy] &= 1 - \alpha^c[(x + z)y - xy] \geq 1 - \alpha^c(z) = \alpha(z).\end{aligned}$$

Jadi, α adalah ideal fuzzy dari R . ■

Akibat 4.6. Subset fuzzy α adalah anti ideal fuzzy dari *near-ring* R jika dan hanya jika α^c adalah ideal fuzzy dari R .

Bukti:

Diambil sebarang $x \in R$, maka

$$\alpha(x) = 1 - \alpha^c(x) = 1 - [1 - (\alpha^c)^c(x)] \Leftrightarrow \alpha = (\alpha^c)^c.$$

Akibatnya, menurut Teorema 4.5: $\alpha = (\alpha^c)^c$ adalah anti ideal fuzzy dari R jika dan hanya jika α^c adalah ideal fuzzy dari R . ■

Berikut diberikan sifat dari anti ideal fuzzy dari suatu *near-ring* yang berhubungan dengan *lower t-level cut* dari α .

Teorema 4.7. Subset fuzzy α adalah anti ideal fuzzy dari *near-ring* R jika dan hanya jika α^{c_t} adalah ideal dari R untuk setiap $t \in [0, 1]$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan α adalah anti ideal fuzzy dari R , maka menurut Teorema 4.5, α^c adalah ideal fuzzy dari R . Mengingat

$\alpha_t^{cL} = \{x \in R \mid \alpha^c(x) \leq t\} = \{x \in R \mid 1 - \alpha(x) \leq t\} = \{x \in R \mid \alpha(x) \geq 1 - t\} \Leftrightarrow \alpha_t^{cL} = \alpha_{1-t}^{cU}$, maka menurut Abdurrahman ([2], Teorema 4.1.6), α_t^{cL} adalah ideal dari R untuk setiap $t \in [0, 1]$.

($\Leftarrow$) Karena $\alpha_t^{cL} = \alpha_{1-t}^{cU}$ adalah ideal dari R untuk setiap $t \in [0, 1]$, maka menurut Abdurrahman ([2], Teorema 4.1.6), α^c adalah ideal fuzzy dari R, sehingga berdasarkan Teorema 4.5, α adalah anti ideal fuzzy dari R. ■

Teorema 4.8. Diberikan near-ring R. Jika A adalah ideal di R, maka untuk setiap $t \in [0, 1]$, ada anti ideal fuzzy α di R sedemikian hingga $\alpha_t^L = A$.

Bukti:

Misalkan $t \in [0, 1]$ dan didefinisikan subset fuzzy α di R:

$$\alpha(x) = \begin{cases} t, & x \in A \\ 1, & x \in R - A \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$.

Diambil sebarang $x, y \in R$.

Jika $x, y \in R - A$, maka $\alpha(x) = \alpha(y) = 1$ sedemikian hingga

$$\alpha(x - y) \leq 1 = \max\{\alpha(x), \alpha(y)\} \text{ dan } \alpha(xy) \leq 1 = \alpha(y).$$

Jika $x, y \in A$, maka $x - y, xy \in A$ sedemikian hingga

$$\alpha(x - y) = t = \max\{\alpha(x), \alpha(y)\} \text{ dan } \alpha(xy) = t = \alpha(y).$$

Jika $x \in A$ dan $y \notin A$, maka $\alpha(x) = t$ dan $\alpha(y) = 1$ sedemikian hingga

$$\alpha(x - y) \leq 1 = \max\{\alpha(x), \alpha(y)\} \text{ dan } \alpha(xy) \leq 1 = \alpha(y).$$

Jadi, $\alpha(x - y) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ dan $\alpha(xy) \leq \alpha(y)$ untuk setiap $x, y \in R$.

Andaikan $\alpha(x) < \alpha(y + x - y)$ untuk suatu $x, y \in R$, maka

$$\alpha(x) = t \text{ dan } \alpha(y + x - y) = 1 \Leftrightarrow x \in A \text{ dan } y + x - y \notin A.$$

Akibatnya, A bukan ideal di R. Kondisi ini kontradiksi dengan yang diketahui, sehingga pengandaian salah, seharusnya

$$\alpha(x) \geq \alpha(y + x - y) \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$

Selanjutnya, andaikan $\alpha(x) > \alpha(y + x - y)$ untuk suatu $x, y \in R$, maka

$$\alpha(x) = 1 \text{ dan } \alpha(y + x - y) = t \Leftrightarrow x \notin A \text{ dan } y + x - y \in A.$$

Di lain pihak, $(A, +)$ adalah subgrup normal di $(R, +)$ maka

$$(x - y) + (y + x - y) - (x - y) \in A, \text{ tetapi}$$

$$(x - y) + (y + x - y) - (x - y) = x + [(-y) + y] + [(x - y) - (x - y)] = x \in A.$$

Kontradiksi dengan $x \notin A$ sehingga pengandaian salah, seharusnya

$$\alpha(x) \leq \alpha(y + x - y) \text{ untuk setiap } x, y \in R.$$

Berdasarkan analisa di atas, maka $\alpha(x) = \alpha(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in R$.

Andaikan $\alpha[(x + a)y - xy] > \alpha(a)$ untuk suatu $x, y, a \in R$ maka

$$\alpha[(x + a)y - xy] = 1 \text{ dan } \alpha(a) = t \Leftrightarrow (x + a)y - xy \notin A \text{ dan } a \in A.$$

Akibatnya, A bukan ideal di R, sehingga kontradiksi dengan A ideal di R.

Jadi, $\alpha[(x + a)y - xy] \leq \alpha(a)$ untuk setiap $x, y, a \in R$.

Selanjutnya, berdasarkan definisi α , maka

$$\alpha_t^L = \{x \in R \mid \alpha(x) \leq t\} = \{x \in R \mid \mu(x) = t\} = A.$$

Jadi, ada α ideal fuzzy di R sedemikian hingga $\alpha_t^L = A$. ■

Berikut diberikan sifat kesamaan dari dua *lower t-level cut* dari α di near-ring R , yang merupakan bagian akhir dari tulisan ini.

Teorema 4.8. *Diberikan anti ideal fuzzy α di near-ring R dan $t_1, t_2 \in [0, 1]$ dengan $t_1 < t_2$. Dua lower t-level cut $\alpha_{t_1}^L$ dan $\alpha_{t_2}^L$ di μ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 < \alpha(x) \leq t_2$.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan α adalah anti ideal fuzzy di R dan $\alpha_{t_1}^L = \alpha_{t_2}^L$ dengan $t_1 < t_2$. Andaikan ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 < \alpha(x) \leq t_2$, maka

$$\alpha(x) > t_1 \text{ dan } \alpha(x) \leq t_2 \Leftrightarrow x \notin \alpha_{t_1}^L \text{ dan } x \in \alpha_{t_2}^L.$$

Akibatnya, $\alpha_{t_1}^L \neq \alpha_{t_2}^L$. Kondisi ini kontradiksi dengan yang diketahui, sehingga pengandaian salah, seharusnya tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 < \alpha(x) \leq t_2$.

($\Leftarrow$) Misalkan α adalah anti ideal fuzzy di R dan tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 < \alpha(x) \leq t_2$. Dimbil sebarang $x \in \alpha_{t_2}^L$, maka $\alpha(x) \leq t_2$. Mengingat $\alpha(x) \leq t_2$ dan tidak ada $x \in R$ sedemikian hingga $t_1 < \alpha(x) \leq t_2$, maka $\alpha(x) \not> t_1$ yang mengakibatkan $\alpha(x) \leq t_1$ sehingga $x \in \alpha_{t_1}^L$, dengan kata lain $\alpha_{t_2}^L \subseteq \alpha_{t_1}^L$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in \alpha_{t_1}^L$, maka $\alpha(x) \leq t_1 < t_2$. Akibatnya $x \in \alpha_{t_2}^L$, sehingga $\alpha_{t_1}^L \subseteq \alpha_{t_2}^L$. dengan kata lain $\alpha_{t_1}^L = \alpha_{t_2}^L$. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan bahwa *subset fuzzy α adalah ideal fuzzy dari near-ring R jika dan hanya jika α^c adalah anti ideal fuzzy dari R .*

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Abou-Zaid. S. 1991. "On fuzzy subnear-rings and ideals", Fuzzy Sets and Systems, vol. 44, pp. 139-146.
- [2]. Abdurrahman. S, Thresye, dan Hijriati. N. 2012. "Ideals fuzzy near-ring", Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon, Vol. 6, No. 2, hal 13 – 19.
- [3]. Kandasamy. W. B. V. 2003. "Smarandache fuzzy algebra", American Research Press Rehoboth.
- [4]. Kim. K. H, Jun. Y. B, and Yon. Y. H. 2005. "On Anti Fuzzy Ideals In Near-Ring". Iranian Journal of Fuzzy System. Vol. 2, No. 2, pp. 71 – 80.
- [5]. Mordeson. J.N, Bhutani. K. R, and Rosenfeld. A. 2005. "Fuzzy group theory", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [6]. Satyanarayana. Bh, and Prasad. K. S. 2013. "Near-ring, Fuzzy Ideals, and Graph Theory", Taylor and Francis Group, LLC.