

PETA KENDALI MULTIVARIAT np

Irma^{1*}, Dewi Anggraini², Fuad M. Farid³

^{1,2,3}Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Kalimantan Selatan, Indonesia

*e-mail corresponding author: irma.ehwani@gmail.com

Abstract

In general, a production process requires the control of multiple quality characteristics (variables). Multivariate control charts can be used to control many quality attributes and identify the root cause of an out-of-control condition or signal. It was used in the production of Hexagon Bolt M16x75mm. However, research regarding the theory of multivariate control charts remains limited. The np multivariate control chart is obtained by combining the processes of parameter estimate, control limit determination, and out-of-control signal detection.

Keywords: Control Charts, Multivariate np , Out of Control Signal.

1. PENDAHULUAN

Salah satu alat pengendali kualitas yang pada umumnya digunakan di dunia perindustrian disebut juga peta kendali. Hal ini dikarenakan peta kendali mampu menampilkan, memantau, mengendalikan perilaku proses dalam batas kendali yang dideskripsikan secara grafik/visual [1]. Peta kendali digunakan untuk memahami apakah sebuah proses manufakturing berjalan dalam kondisi terkontrol (*in control*) atau tidak (*out of control*).

Peta kendali dapat diklasifikasikan menjadi dua tipe, yaitu peta kendali variabel dan peta kendali atribut. Peta kendali variabel dirancang untuk mengontrol karakteristik produk dan parameter proses yang diukur dalam skala kontinu sedangkan peta kendali atribut dirancang untuk mengontrol proses yang diukur dalam skala diskret [2]. Peta kendali atribut dapat digunakan pada peta kendali yang bersifat univariat dan multivariat. Peta kendali univariat digunakan jika variabel karakteristik kualitas yang diamati hanya satu sedangkan peta kendali multivariat digunakan apabila variabel karakteristik kualitas lebih dari satu [2].

Pada umumnya, suatu proses produksi melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas yang akan dikendalikan. Oleh karena itu, dikembangkanlah peta kendali multivariat yang dapat memonitor dua atau lebih karakteristik kualitas secara simultan [2]. Selain untuk memonitoring, peta kendali multivariat juga dapat digunakan untuk mendeteksi adanya hubungan antara variabel kualitas dan memberikan pengendalian yang lebih sensitif dibandingkan dengan penggunaan peta kendali univariat pada masing-masing variabel [3]. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji mengenai proses terbentuknya peta kendali multivariat np dan bagaimana tahapan menentukan batas kendali dari peta kendali multivariat np .

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pengendalian Proses Statistik

Penerapan metode-metode statistik untuk pengukuran dan analisis variasi produk disebut juga pengendalian proses statistik. Proses ini digunakan untuk meminimalisir penyimpangan atau kesalahan dalam proses. Variasi atau kesalahan dalam proses terdiri dari dua macam penyebab, yaitu penyebab umum (*random cause*) yang sudah melekat pada proses dan penyebab khusus (*assignable cause*) yang merupakan kesalahan yang disebabkan oleh faktor luar pada proses [4].

2.2 Peta Kendali

Peta kendali merupakan grafik yang mencerminkan kendali pada suatu proses atau teknik yang dikenal untuk memecahkan masalah dan menghasilkan perbaikan kualitas dan telah diukur atau dikalkulasikan dari sampel terhadap jumlah sampel atau waktu [2].

2.3 Batas kendali

Menentukan batas kendali pada umumnya dapat menggunakan prinsip peta kendali Shewhart. Peta kendali memiliki beberapa unsur yaitu, garis tengah (GT), batas kendali atas (BKA), dan batas kendali bawah (BKB). Batas kendali secara umum dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} BKA &= \mu_w + k\sigma_w \\ GT &= \mu_w \\ BKB &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned} \quad (1)$$

Dimana w adalah statistik yang mengukur karakteristik kualitas, μ_w adalah nilai rata-rata (*mean*) dari w , σ_w^2 adalah variansi dari w , dan k adalah jarak batas kendali dari garis tengah, dengan ketentuan $k = 3$ [2]

2.4 Nilai Harapan Matematika

a. Nilai Ekspektasi

Misalkan X adalah variabel acak dengan distribusi probabilitas $f(x)$, mean atau nilai ekspektasi dari X adalah [5]:

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) \quad \text{Jika } X \text{ diskrit} \quad (2)$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad \text{Jika } X \text{ kontinu} \quad (3)$$

b. Variansi

Variansi dari variabel acak X atau variansi dari distribusi probabilitas X dinyatakan dengan $Var X$ atau dinotasikan dengan σ_x^2 atau σ^2 [5].

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \quad \text{Jika } X \text{ diskrit} \quad (4)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{Jika } X \text{ kontinu} \quad (5)$$

c. Kovariansi

Misalkan X dan Y merupakan variabel acak dengan sebaran peluang bersama $f(x, y)$. Kovariansi dari X dan Y adalah [5]

$$\begin{aligned}\mu_{XY} &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f(x, y)\end{aligned}\quad (6)$$

Jika X dan Y diskrit

$$\begin{aligned}\mu_g(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f(x, y)\end{aligned}\quad (7)$$

Jika X dan Y kontinu.

2.5 Distribusi Binomial

Distribusi Binomial merupakan suatu proses percobaan yang terdiri dari sederetan peristiwa sebaran Bernoulli yang tidak terkait atau saling bebas dan berulang sebanyak n kali. Nilai-nilainya akan dinotasikan oleh $b(x; n, p)$ karena bergantung pada banyaknya percobaan dan peluang dari keberhasilan pada suatu percobaan [5].

2.6 Peta Kendali Univariat p

Pada umumnya peta kendali univariat p dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{BKA} &= \bar{p} + 3\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})} \\ \text{GT} &= \bar{p} \\ \text{BKB} &= \bar{p} - 3\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})}\end{aligned}\quad (8)$$

2.7 Peta Kendali Univariat np

Pada umumnya peta kendali multivariat np dapat didefinisikan sebagai berikut [2]:

$$\begin{aligned}\text{BKA} &= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1 - n\bar{p})} \\ \text{GT} &= n\bar{p} \\ \text{BKB} &= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1 - n\bar{p})}\end{aligned}\quad (9)$$

2.8 Estimasi Parameter

Estimasi parameter dilakukan dengan mengukur data yang telah diobservasi ketika vektor proporsi cacat p dan matriks korelasi Σ tidak diketahui [3].

$$\bar{\Sigma} = [\delta_{ij}]_{m \times m} \quad (10)$$

dimana:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} &= \text{Matriks} \\ \delta_{ij} &= \text{Koefisien korelasi antara karakteristik-} i \text{ dan karakteristik-} j \\ m &= \text{Karakteristik kualitas} \end{aligned}$$

2.9 Identifikasi Sinyal Luar Kendali

Karakteristik kualitas yang menyebabkan proses *out of control* dapat diidentifikasi dengan skor statistik (Z) sebagai berikut:

$$Z_i = \frac{[c_i - n\bar{p}_i]}{\sqrt{\bar{p}_i}} \quad (11)$$

3. METODE PENELITIAN

3.1 Materi penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan cara kajian/studi literatur dari berbagai sumber, baik buku, jurnal maupun makalah yang berkaitan dan relevan dengan peta kendali multivariat np .

3.2 Prosedur Penelitian

Prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji literatur tentang peta kendali multivariat np dalam pengendalian kualitas.
2. Menjelaskan proses terbentuknya peta kendali multivariat np melalui empat tahapan yaitu mengestimasi parameter menggunakan persamaan, pembentukan statistik X , menentukan batas kendali, dan mengidentifikasi sinyal luar kendali.
3. Menentukan batas kendali dari peta kendali multivariat np menggunakan prinsip dasar *Shewhart*.
4. Memberikan contoh pendekatan numerik penerapan peta kendali multivariat np .
5. Menyusun kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Konsep Dasar Peta Kendali Multivariat np

Asumsikan bahwa terdapat karakteristik kualitas m yang ditandai dengan p_i probabilitas bahwa suatu item tidak sesuai dengan karakteristik kualitas i .

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \delta_{ji} \\ |\delta_{ij}| \leq 1 \\ \delta_{ij} = 1, \quad i = j \end{cases} \quad (12)$$

Nilai koefisien korelasi antara karakteristik i dan karakteristik j bersifat mutlak dimana nilainya kurang dari sama dengan 1. Kemudian nilai koefisien korelasi antara karakteristik i dan karakteristik j bernilai 1 dimana nilai i sama dengan nilai j .

Dengan menggunakan notasi matriks, misalkan $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ adalah pecahan vektor yang tidak sesuai dan $\Sigma = [\delta_{ij}]_{m \times m}$ adalah matriks koefisien korelasi maka C_i adalah hitungan unit yang tidak sesuai dengan karakteristik kualitas i dalam sampel dimana $C = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ vektor hitungan unit yang tidak sesuai berdistribusi binomial [3]. Karakteristik kualitas dari proses atribut multivariat mempengaruhi proses tersebut secara berbeda meskipun karakteristik ini berubah dengan jumlah yang sama. Semakin kecil pecahan p_i yang tidak sesuai, semakin besar kontribusi C_i terhadap statistik uji X dari proses atribut multivariat. Dengan kata lain, perubahan statistik uji X lebih sensitif terhadap perubahan hitungan C_i dengan pecahan lebih kecil yang tidak sesuai. Oleh karena itu, jelas bahwa bobot hitungan C_i harus berbanding terbalik dengan pecahan p_i yang tidak sesuai.

$$X_D = \sum_{i=1}^m \frac{d_i C_i}{\sqrt{p_i}} \quad (13)$$

Dengan demikian, vektor ketidaksesuaian D dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$$

Maka perhitungan batas kendali dimulai dengan menghitung nilai rata-rata menggunakan Persamaan (2), yang kemudian fungsi x pada persamaan tersebut merupakan nilai statistik uji pada persamaan (13).

$$\begin{aligned} E(X_D) &= E\left(\sum_{j=1}^m \frac{d_j C_j}{\sqrt{p_j}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{d_j E(C_j)}{\sqrt{p_j}} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{d_j np_j}{\sqrt{p_j}} \\ &= n \sum_{j=1}^m d_j \sqrt{p_j}, \end{aligned} \quad (14)$$

Selanjutnya rangkaian perhitungan batas kendali yakni dengan menghitung nilai varians. Sama seperti perhitungan nilai ekspektasi, fungsi x pada persamaan tersebut juga merupakan nilai statistik uji pada persamaan (13). Berdasarkan uraian persamaan diatas, maka didapatkan formula untuk menghitung Garis Tengah (GT) [3].

Berdasarkan [3] maka nilai varians didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Var(X_D) &= Var\left(\sum_{j=1}^m \frac{d_j C_j}{\sqrt{p_j}}\right) \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{d_j^2 Var(C_j)}{p_j} + 2 \sum_{i < j} d_i d_j \delta_{ij} \frac{\sqrt{Var(C_i) Var(C_j)}}{\sqrt{p_i p_j}} \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{d_j^2 n p_j (1 - p_j)}{(\sqrt{p_j})^2} \\
 &\quad + 2 \sum_{i < j} \frac{d_i d_j \delta_{ij} \sqrt{n p_i (1 - p_i) n p_j (1 - p_j)}}{\sqrt{p_i p_j}} \\
 &= n \left\{ \sum_{j=1}^m d_j^2 (1 - p_j) + 2 \sum_{i < j} d_i d_j \delta_{ij} \sqrt{(1 - p_i)(1 - p_j)} \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Kemudian untuk mendapatkan nilai koefisien korelasi δ_{ij} dapat diketahui atau diukur dengan persamaan dari sampel awal seperti sebagai berikut:

$$\delta_{ij} = \frac{Cov(C_i, C_j)}{\sqrt{Var(C_i) Var(C_j)}} = \frac{E[(C_i - E(C_i))(C_j - E(C_j))]}{\sqrt{Var(C_i) Var(C_j)}} \quad (16)$$

Maka dengan mengasumsikan bahwa vektor P yang tidak sesuai = $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ dan matriks korelasi Σ berdasarkan persamaan (4) dari proses multivariat yang telah diukur, batas kendali dan garis tengah dari peta kendali multivariat np tipe *Shewhart* sebaga berikut:

$$\begin{aligned}
 &= n \sum_{i=1}^m d_j \sqrt{p_j} \\
 \text{BKA} &= \sqrt{n \left\{ \sum_{j=1}^m d_j^2 (1 - p_j) + 2 \sum_{i < j} (d_i d_j \delta_{ij} \sqrt{(1 - p_i)(1 - p_j)}) \right\}} \\
 \text{GT} &= n \sum_{i=1}^m d_j \sqrt{p_j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{i=1}^m d_j \sqrt{p_j} \\
\text{BKB} &- 3 \sqrt{n \left\{ \sum_{j=1}^m d_j^2 (1 - p_j) + 2 \sum_{i < j} (d_i d_j \delta_{ij} \sqrt{(1 - p_i)(1 - p_j)}) \right\}} \quad (17)
\end{aligned}$$

Batas-batas kendali diatas didapatkan berdasarkan prinsip peta kendali *Shewhart* pada Persamaan (1), kemudian dilakukan perhitungan mean sehingga diperoleh Persamaan (14) dan melakukan perhitungan varians sehingga diperoleh Persamaan (15).

4.2 Implementasi Peta Kendali Multivariat np

4.2.1 Mengestimasi Parameter

Vektor proporsi cacat dari sampel j dan p_j , dapat diestimasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\bar{p}_j &= \left(\frac{c_{1j}}{n}, \frac{c_{2j}}{n}, \dots, \frac{c_{mj}}{n} \right) \\
&= (\bar{p}_{1j}, \bar{p}_{2j}, \dots, \bar{p}_{mj}) \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (18)
\end{aligned}$$

dimana $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, k$ dengan $\bar{p}_j$ adalah estimasi vektor proporsi cacat c_{ij} adalah banyaknya cacat pada variabel 1 pengamatan ke- j dan n adalah banyaknya sampel tiap pengamatan ke- j . kemudian menghitung nilai rata-rata proporsi produk cacat untuk semua pengamatan berdasarkan karakteristik kualitas, dilambangkan dengan $\bar{p}_i$ dengan rumusan berikut.

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{\sum_{j=1}^k \bar{p}_j}{k} = \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_{1j}}{nk}, \frac{\sum_{j=1}^k c_{2j}}{nk}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^k c_{mj}}{nk} \right) \\
&= (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m) \quad (19)
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk estimasi dari matriks korelasi Σ didapatkan setelah menguraikan persamaan (6) pada sub bab sebelumnya, yaitu sebagai berikut:

$$\delta_{ij} = \frac{\text{Cov}(C_i, C_j)}{\sqrt{\text{Var}(C_i) \text{Var}(C_j)}} \quad (20)$$

Berdasarkan persamaan (20), maka diperoleh koefisien korelasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 \sum_{h=1}^k \left[C_{ij} - \frac{\sum_{h=1}^k c_{ih}}{k} \right] \left[C_{jh} - \frac{\sum_{h=1}^k c_{jh}}{k} \right]}{\sqrt{\left[\sum_{h=1}^k \left(C_{ih} - \frac{\sum_{h=1}^k c_{ih}}{k} \right)^2 \right] \left[\sum_{h=1}^k \left(C_{jh} - \frac{\sum_{h=1}^k c_{jh}}{k} \right)^2 \right]}} \\
\hat{\Sigma} &= [\delta_{ij}]_{m \times m} \quad (21)
\end{aligned}$$

4.2.2 Penetapan Batas Kendali

Proses yang dilakukan setelah mendefinisikan bentuk umum peta kendali pada sub bab sebelumnya adalah menentukan BKA, GT, dan BKB dengan p_i dan p_j adalah proporsi karakteristik cacat, n adalah banyaknya sampel, dan δ_{ij} adalah koefisien korelasi antar karakteristik kualitas, maka dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$BKA = n \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_j} + 3 \sqrt{n \left\{ \sum_{i=1}^m (1 - \bar{p}_j) + 2 \sum_{i < j} (\delta_{ij} \sqrt{(1 - \bar{p}_i)(1 - \bar{p}_j)}) \right\}} \quad (22)$$

$$GT = n \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_j} \quad (23)$$

$$BKB = n \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_j} - 3 \sqrt{n \left\{ \sum_{i=1}^m (1 - \bar{p}_j) + 2 \sum_{i < j} (\delta_{ij} \sqrt{(1 - \bar{p}_i)(1 - \bar{p}_j)}) \right\}} \quad (24)$$

4.2.3 Mengidentifikasi Sinyal Luar Kendali

Pengidentifikasian variabel yang berada di luar batas kendali pada peta kendali multivariat np dapat dilakukan dengan perhitungan skor statistik Z menggunakan persamaan (11). Ketika terdapat sinyal *out of control* maka menghitung nilai Z_i ($i = 1, 2, 3, \dots, p$) dimana variabel yang memiliki nilai Z_i yang paling besar dihitung terlebih dahulu. Jika $Z_i > BK$ (batas kendali) maka variabel ke- i tersebut adalah penyebab *out of control*.

4.2.4 Pemilihan Ukuran Sampel

Untuk menghindari situasi yang tidak diinginkan, kita dapat memilih ukuran sampel n agar kemungkinan untuk menemukan satu unit yang tidak sesuai per sampel ini setidaknya sama dengan beberapa nilai yang ditentukan (seperti 0,95). Menggunakan tabel Poisson kumulatif dengan cara yang mirip dengan prosedur diagram np univariat, syarat untuk ukuran sampel diagram peta kendali multivariat np adalah:

$$n \sum_i p_i \geq 3m \quad (25)$$

Jika nilai kendali dari pecahan vektor P yang tidak sesuai itu kecil, maka kita dapat memilih n yang cukup besar agar peta kendali peta kendali multivariat np bisa memiliki batas kendali bawah yang positif. Hal ini untuk memastikan bahwa peneliti memiliki mekanisme sendiri untuk memicu penyelidikan dari satu atau lebih banyak sampel berisi sejumlah kecil unit yang tidak sesuai dan tidak biasa. Berikut notasi matriks, karena peneliti ingin memiliki:

$$LCL = n\sqrt{PI} - 3\sqrt{n\text{Trace}(\sqrt{(I-P)(I-P)} \cdot \Sigma \cdot)} > 0 \quad (26)$$

maka hal ini menyiratkan bahwa

$$n > 9 \frac{\text{Trace}(\sqrt{(I-P)(I-P)} \cdot \Sigma \cdot)}{(\sqrt{PI} \cdot)^2} \quad (27)$$

dimana $I = [1, 1, \dots, 1]_{m \times l}$ adalah vektor unit.

Berdasarkan Persamaan (27) dapat dihitung jika pecahan vektor P yang tidak sesuai dan matriks korelasi Σ dari proses atribut multivariat telah diketahui atau diukur.

4.3 Penerapan Peta Kendali Multivariat np

Langkah-langkah dalam menerapkan peta kendali multivariat np :

- Menentukan nilai estimasi parameter dan juga menghitung koefisien korelasi untuk digunakan menentukan batas kendali
- Menghitung nilai statistik $\bar{X}$ pada masing-masing subgroup ke- k
- Menentukan batas-batas kendali yang terdiri dari Batas Kendali Atas (BKA), Garis Tengah (GT), dan Batas Kendali Bawah (BKB).
- Menghilangkan titik-titik yang menjadi penyebab *signal out of control*

Proses pembentukan peta kendali multivariat np tersebut diterapkan pada kasus produksi botol kecap yang dengan menggunakan tiga karakteristik kualitas dan terdapat 30 sampel. [6].

Tabel 1. Data Sampel

No Sampel	Air Mark (C1)	Tegangan (C2)	Sunken Sambungan (C3)
1	0	8	26
2	4	3	24
3	0	0	6
4	2	24	12
5	10	24	16
6	26	17	4
7	0	0	16
8	38	20	38
9	24	24	6
10	0	34	0
11	0	16	12
12	28	8	0
13	4	11	16
14	14	0	16
15	8	10	0
16	14	2	0
17	6	0	28
18	18	0	4
19	16	0	0
20	2	1	4
21	0	8	4
22	0	0	0
23	0	0	0
24	2	0	0
25	0	0	10
26	0	5	0
27	28	0	0
28	6	3	0
29	22	4	0
30	22	0	0

a. Estimasi Parameter

Dengan menggunakan 20 sampel pertama untuk mengukur pecahan vector P (p_1, p_2, p_3) yang tidak sesuai sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{\sum_{j=1}^k \bar{p}_j}{k} = \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_{1j}}{nk}, \frac{\sum_{j=1}^k c_{2j}}{nk}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^k c_{mj}}{nk} \right) \\ \bar{P} &= \frac{\sum_{j=1}^3 \bar{P}_j}{k} = \left(\frac{\sum_{j=1}^k c_{1j}}{nk}, \frac{\sum_{j=1}^k c_{2j}}{nk}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^k c_{mj}}{nk} \right) \\ \bar{P}_1 &= \frac{214}{20.30} \\ &= 0.3567\end{aligned}$$

Begitu juga untuk menghitung p_2 dan p_3 .

b. Nilai Statistik X

Nilai statistik X baru dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}X &= \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\sqrt{\bar{p}_i}} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{\sqrt{\bar{p}_i}} \\ &= \frac{0}{0.5972} + \frac{8}{0.5802} + \frac{26}{0.6164} \\ &= 55.96520924\end{aligned}$$

c. Koefien Korelasi

Menghitung nilai koefisien korelasi antara karakteristik kualitas i dan karakteristik kualitas j sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \delta_{21} = 0.13 \\ \delta_{13} &= \delta_{31} = 0.029 \\ \delta_{23} &= \delta_{32} = 0.003\end{aligned}$$

d. Batas-batas Kendali

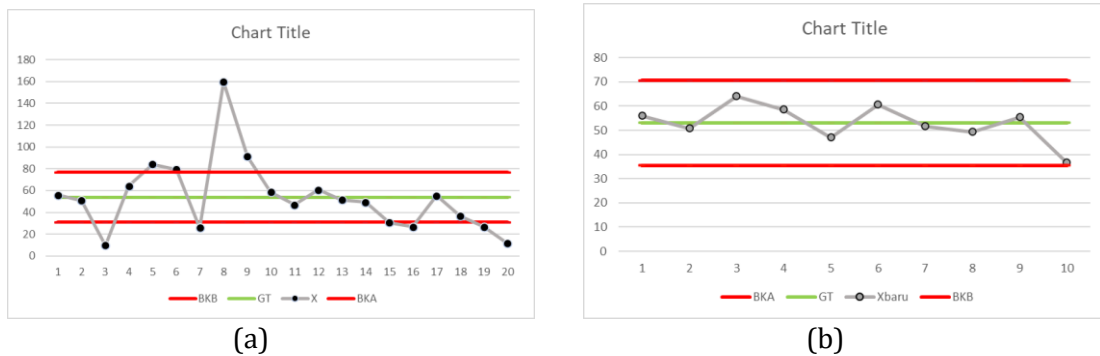
Setelah menghitung nilai nilai parameter p_i dan menghitung nilai statistik X maka selanjutnya adalah menghitung nilai Batas Kendali Atas (BKA), Garis Tengah (GT), dan Batas Kendali Bawah (BKB). Sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{BKA} &= \frac{30n \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_j}}{\sqrt{n \left\{ \sum_{i=1}^m (1 - \bar{p}_j) + 2 \sum_{i < j} (\delta_{ij} \sqrt{(1 - \bar{p}_i)(1 - \bar{p}_j)}) \right\}}} = 76.67\end{aligned}$$

$$GT = 30 \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_j} = 53.8166$$

$$BKB = 30 \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_j} - 3 \sqrt{n \left\{ \sum_{i=1}^m (1 - \bar{p}_j) + 2 \sum_{i < j} (\bar{\delta}_{ij} \sqrt{(1 - \bar{p}_i)(1 - \bar{p}_j)}) \right\}} = 30.967$$

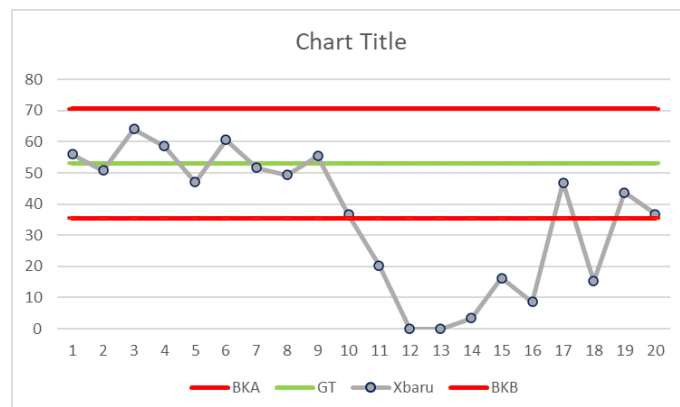
Berikut diagram kendali dari batas-batas kendali yang telah didapatkan. Pada fase I terdapat 10 pengamatan yang berada di luar batas kendali yaitu pengamatan ke-3, 5, 7, 8, 9, 15, 16, 19, dan pengamatan ke-20 pada Gambar 1.



Gambar 1 Peta Kendali Multivariat np (a) fase I; (b) sebanyak 10 pengamatan

Untuk memperoleh batas kendali yang baru maka dilakukan perhitungan ulang dengan menggunakan data fase I yang berjumlah 10 pengamatan. Langkah pertama yaitu menentukan nilai statistik X selanjutnya adalah menghitung batas kendali yang terdiri dari $BKA = 0,7666$, $GT = 53,8166$, dan $BKB = 30,9672$.

Terdapat 10 pengamatan pada fase I berada dalam batas kendali maka batas kendali dan parameter pada fase I dapat digunakan untuk proses produksi fase II yang bertujuan untuk mengetahui apakah proses produksi fase II sudah dalam keadaan terkendali atau tidak. Dari diagram kontrol Peta kendali multivariat np fase II terdapat 7 pengamatan yang berada di luar batas kendali yaitu pengamatan ke-11, 12, 13, 14, 15, 16, dan 18. Disajikan pada Gambar 2, dan untuk proses selanjutnya tetap menggunakan batas kendali dan parameter dari proses produksi fase I karena pada fase I proses produksi sudah dalam keadaan terkendali.



Gambar 1 Peta Kendali Multivariat np fase II

e. Identifikasi *sinyal out of control*

Dalam peta kendali multivariat np , untuk mengidentifikasi sinyal *out of control* dari pengamatan dengan cara menghitung statistik Z_i pada setiap titik *out of control*. Statistik yang digunakan dalam menginterpretasikan sinyal *out of control* dalam Peta kendali multivariat npchart adalah:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{[c_i - n\bar{p}_i]}{\sqrt{\bar{p}_i}} \\ &= \frac{[0 - 30.0.3367]}{\sqrt{0.3367}} \\ &= -11.9443 \end{aligned}$$

Dari perhitungan yang dilakukan, maka diperoleh nilai variable - variabel yang *out of control* yang disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Nilai *out of control*

No	C1	C2	C3
11	-11.9443	2.183043	-5.83997
12	-11.9443	-11.6046	-12.3288
13	-11.9443	-11.6046	-12.3288
14	-8.59544	-11.6046	-12.3288
15	-11.9443	-11.6046	3.893314
16	-11.9443	-2.98732	-12.3288
18	-1.89769	-6.43423	-12.3288

- 1) Variabel C2 pengamatan ke-1 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_2 = 2.183043$
- 2) Variabel C2 pengamatan ke-2 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_2 = -11.6046$
- 3) Variabel C2 pengamatan ke-3 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_2 = -11.6046$
- 4) Variabel C1 pengamatan ke-4 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_1 = -8.59544$
- 5) Variabel C3 pengamatan ke-5 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_3 = 3.893314$
- 6) Variabel C2 pengamatan ke-6 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_2 = -2.98732$
- 7) Variabel C1 pengamatan ke-8 merupakan kontributor terbesar penyebab sinyal *out of control* dengan $Z_1 = -1.89769$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- a. Pembentukan peta kendali multivariat dilakukan dengan beberapa langkah yaitu pertama mengestimasi parameter, menghitung nilai statistik X yang mana hasil transformasi dari sampel. Kemudian menetapkan batas kendali, dengan sampel percobaan perhitungan batas kendali dilakukan, jika batas kendali sudah terkendali

maka akan dilanjutkan ke tahap selanjutnya yaitu menghitung data apabila batas kendali tidak terkendali atau *out of control* maka perlu dilakukan revisi untuk mendapatkan batas kendali standar yang sesuai. Revisi batas kendali dilakukan dengan cara menghilangkan pengamatan yang berada diluar batas kendali, kemudian melakukan perhitungan ulang batas-batas kendali. Setelah didapatkan batas kendali standar yang sesuai atau batas kendali yang dimana semua pengamatan berada di dalam kendali atau terkendali, sehingga batas-batas kendali tersebut dapat digunakan untuk pengendalian suatu proses akan mendatang.

- b. Pada penerapan numerik dengan menggunakan proses produksi botol kecap sebagai kasus didapatkan bahwa setelah dilakukan perhitungan batas kendali pada fase I terdapat 10 titik pengamatan berada di luar batas kendali sehingga dilakukan perhitungan ulang dan didapatkan batas kendali sebagai standar untuk data yang akan datang. Kemudian pengendalian proses pada fase II belum terkendali karena terdapat 8 pengamatan yang berada di luar batas kendali, sehingga perlu dilakukan identifikasi sinyal *out of control* terhadap 8 pengamatan yang berada di luar batas kendali tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] N. B. Primastuti, S. Sudarno, and S. Suparti, "Pengontrolan Kualitas produk menggunakan metode diagram kontrol Multivariat np (Mnp) dalam usaha peningkatan kualitas (Studi kasus di PT Coca Cola Amatil Indoneisa (CCAI) Semarang)," *J. Gaussian*, vol. 3, no. 1, pp. 111–120, 2014.
- [2] D. C. Montgomery, *Introduction To Statistical Quality Control*, vol. 10, no. 1. 2009.
- [3] P. Taylor and X. S. Lu, "International Journal of Control chart for multivariate attribute processes," *Int. J. Prod. Res.*, vol. 36, no. 12, pp. 3477–3489, 2010.
- [4] D. W. Ariani, *Pengendalian kualitas statistik: pendekatan kuantitatif dalam manajemen kualitas*. Yogyakarta: Andi, c2004, 2004.
- [5] R. E. R. H. M. K. Y. Walpole, *Probability and statistics for engineers and scientists*. 2012.
- [6] Y. Nurkotimah and F. Rozi, "Analisis Grafik Kendali np Yang Distandarisasi untuk Pengendalian Kualitas dalam Proses Pendek," vol. 2, no. 2, p. 115, 2012, doi: 10.18860/ca.v2i2.2226.
- [7] Febrianto, Muhammad Mashuri, dan Lucia A. (2017) 'Penerapan Diagram Kontrol Multivariat np pada Proses Produksi Hexagon Bolt M16x75mm di PT. Timur Megah Steel Gresik', (3), pp. 1–6.
- [8] Prihastono, E. (2012) 'PENGENDALIAN PROSES STATISTIK UNTUK MENINGKATKAN PRODUKTIVITAS DAN KUALITAS PADA INDUSTRI', *Dinamika Teknik*, Vol. VI, N, pp. 20–26.